Ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2}{7^k + 5}$

لازم يكونوا بنفس الاتجاه

ممكن تكون k

$$0 \le \frac{3^k - 2}{7^k + 5} < \frac{3^k}{7^k + 5} < \frac{3^k}{7^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{7^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^k \quad \text{G-ser} \rightarrow r = \left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7} < 1 \Rightarrow \text{Conv}$$

by C-Test $\rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2}{7^k + 5}$ is Conv.

Ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2}$

$$-1 \le \cos(k) \le 1$$
$$0 \le \cos^2(k) \le 1$$
$$0 \le \frac{\cos^2(k)}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$$

sequezing Thm

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ p-ser

$p = 2 > 1 \rightarrow$ Conv

by C-Test $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2}$ is Conv.

Remember!!

$-1 \le \sin x \le 1 \longrightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1 \longrightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1$

Ex] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{-k^2}}{4+e^{-k}}$

$$\underbrace{\frac{ke^{-k^2}}{4+e^{-k}}}_{a_k} < ke^{-k^2}$$

أكبر لأنه a_k نفس البسط ولكن مقسوم
على اقتران موجب وكلما زاد
المقام قلت القيمة

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$ conv by I-Test

$\Rightarrow$ by C-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{-k^2}}{4+e^{-k}}$ is Conv.

Try to solve these questions :

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2+4k)^2}$

الحل :

$$\frac{4}{4+16k+16k^2} < \frac{4}{16k^2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} \rightarrow$ p-ser $p=2>1 \rightarrow$ Con

$\rightarrow a_k$ conv

الجواب conv

② $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5}{k^3+9k} \Rightarrow$ Conv

③ $\sum_{k=1}^{\infty} 9 \longrightarrow$ D-Test

$\lim_{k\to\infty} 9 = 9 \neq 0 \Rightarrow$ div

4 The limit comparison test

Suppose $a_k > 0$, $b_k > 0$

$b_k = \dfrac{\text{الجزء الذي يحمل أكبر أس في البسط}}{\text{الجزء الذي يحمل أكبر أس في المقام}}$

If $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = L$

- → $L > 0$ and $L \neq \infty$ Then $\sum a_k$ and $\sum b_k$ both Conv or both div
- → $L = 0$ and $\sum b_k$ is Conv Then $\sum a_k$ is conv
- → $L = \infty$ and $\sum b_k$ is div Then $\sum a_k$ is div

حالات خاصة

نستخدم في حالة:

$\dfrac{\text{Poly}}{\text{Poly}}$ / $\dfrac{\text{جذر}}{\text{جذر}}$

الحل: نجد b_k ثم نأخذ النهاية لقسمة $\dfrac{a_k}{b_k}$

- ← اذا كان الجواب موجب ولا يساوي ∞ ← a_k و b_k كلاهما conv أو كلاهما div
- ← اذا كان الجواب 0 و b_k conv فإن a_k conv
- ← اذا كان الجواب ∞ و b_k div فإن a_k div

Ex] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3+3k^2+1}{k^6+k^2+3}$

by L-com. Test

$$b_k = \frac{k^3}{k^6} = \frac{1}{k^3}$$

ما في داعي للمعاملات ولكن صحيح الحل معهم

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5k^3+3k^2+1}{k^6+k^2+3} \cdot \frac{k^3}{1}$$

ضربت بالمقلوب (يعني قسمت)

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{5k^6+3k^5+1}{k^6+k^2+3} = 5 > 0$$

$\leftarrow$ لا علاقة لها بـ conv و div، فقط نقارن من خلالها

By L-com. Test since $\sum b_k$ is conv

Then $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is conv

لو كانت div b_k بكون a_k div $\leftarrow$

Ex] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{\sqrt[3]{k^5+2}}$ by L-Comp. Test

$$b_k = \frac{k}{k^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \longrightarrow p\text{-ser} \qquad p = \frac{2}{3} < 1 \longrightarrow \text{div}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+1}{\sqrt[3]{k^5+2}} \cdot \frac{k^{\frac{2}{3}}}{1} = 3 > 0$$

لو كانت اقل من 0 بكون الاختبار فاشل

by L.C. Test

since $\sum b_k$ is div Then $\sum a_k$ is div

Ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+1}{\sqrt[3]{k^7+5}}$ by L.C. Test

$b_k = \frac{k}{k^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$ p-ser

$p = \frac{4}{3} > 1$ conv

$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{5k+1}{\sqrt[3]{k^7+5}} \cdot \frac{k^{\frac{4}{3}}}{1} = 5 > 0$

by L.C. Test

since $\sum b_k$ is conv Then $\sum a_k$ is Conv

Ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2-3k}}$

by L.C. Test

$b_k = \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \rightarrow$ p-ser

$p = \frac{2}{3} < 1 \rightarrow$ div

$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2-3k}} \cdot k^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} > 0$

by L.C. Test

since $\sum b_k$ is div Then $\sum a_k$ is div

$\boxed{5}$ Ratio - Test (R-Test)

Let $\sum_{k=s}^{\infty} a_k$ be a ser. with positive terms

* Let $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$
- → If $L<1$ Then $\sum a_k$ is Conv.
- → If $L>1$ or $L=\infty$ Then $\sum a_k$ is div.
- → If $L=1 \Rightarrow$ Fail

$\boxed{6}$ Root - Test

Let $\sum_{k=s}^{\infty} a_k$ be a ser. with positive terms.

* Let $\lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} = L$
- → If $L<1$ Then $\sum a_k$ is Conv
- → If $L>1$ or $L=\infty$ Then $\sum a_k$ is div
- → If $L=1 \Rightarrow$ fail

توضيح :- Ratio و Root متشابهان ، حيث أن لهم نفس الشروط ⇐ أولاً Ratio ⇐ البسط في النهاية هو a_{k+1} (يعني نفس السيريز ولكن مكان كل k نضع $k+1$) والمقام هو a_k (أي نقوم بقسمة a_{k+1} على a_k ونأخذ النهاية لهم).

ثانياً Root ⇐ هو عبارة عن a_k مرفوعة للأس $1/k$ (سمي Root لأنه عبارة عن جذر) ونستخدمه للتخلص من الأس اذا كان a_k مرفوع لقوة k ومضاعفاتها ثم نأخذ النهاية له.

في الاختبارين اذا كان جواب النهاية اقل من واحد يكون السيريز Conv ، واذا كان اكبر من واحد أو يساوي ∞ يكون السيريز div ، واذا كان الجواب يساوي واحد يكون الاختبار فاشل.

$\boxed{\times}$ اذا كان a_k يحتوي على مضروب نستخدم Ratio (لو كان المضروب بكامله فيه جمع أو طرح لازم نتخلص منهم أول)

Ex) ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ يوجد مضروب ويوجد أس، ولكن الأس ليس للسيريز كامل لذلك نستخدم Ratio

by Ratio-Test

$$a_k = \frac{k^k}{k!} \quad , \quad a_{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

مكان كل k نضع k+1

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k}$$

ضربت بالمقلوب يعني قسمت

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k \cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

page 24 آخر الصفحة رقم 7

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e > 1 \qquad e \approx 2.718$$

by Ratio-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ is div

المضروب :-

$$k! = k(k-1)(k-2)(k-3)\dots !$$

$$(k+1)! = (k+1)(k)(k-1)(k-2)\dots !$$

الحد الأول هو يلي مع اشارة المضروب ثم نطرح واحد من كل حد بعده.

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2.1 = 2$, $3! = 3.2.1 = 6$, ...

لا يوجد مضروب للسالب ^^

② $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{5^k - 2}{k! + 3}$ يوجد مضروب ولكن لا يجوز استخدام Ratio قبل التخلص من $\boxed{+3}$

(نتخلص من -2 و $+3$ عن طريق C-Test)

sol: by C-Test

$$\underbrace{\frac{5^k - 2}{k! + 3}}_{a_k} < \frac{5^k}{k! + 3} < \underbrace{\frac{5^k}{k!}}_{b_k}$$

كلما زاد المقام قلت القيمة
وكلما قل البسط قلت القيمة

نحدد اذا b_k Conv أولا
عن طريق Ratio

$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ by R-Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{5^k} \cdot 5}{(k+1)\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{5^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} = 0 < 1$$

$\rightarrow$ b_k is Conv. (by R-Test)

by C-Test $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{5^k - 2}{k! + 3}$ is Conv

ملاحظات:

① نتوقف عن تفكيك المضروب عند الوصول إلى شكل مماثل له بالسؤال ثم نختصر.

② دائما ← اذا كانت المسألة تحتوي على قطع زائدة $\square + \square$ $\square - \square$ تخلص من القطع في البداية (أسهل للحل)

③ Ratio-Test ليس فقط للمضروب

(3) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2-5}{e^{2k}+3}$

by C-Test

$$0 \leq \underbrace{\frac{k^2-5}{e^{2k}+3}}_{a_k} < \frac{k^2}{e^{2k}+3} < \underbrace{\frac{k^2}{e^{2k}}}_{b_k}$$

$\sum_{k=3} \frac{k^2}{e^{2k}}$ by Ratio - Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{e^{2(k+1)}} \cdot \frac{e^{2k}}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{\cancel{e^{2k}} \cdot e^2} \cdot \frac{\cancel{e^{2k}}}{k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{e^2 k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+2k+1}{e^2 k^2} = \frac{1}{e^2} = \frac{\text{معامل أعلى قوة في البسط}}{\text{معامل أعلى قوة في المقام}}$$

$$\frac{1}{e^2} < 1$$

by R-Test $\sum_{k=3} \frac{k^2}{e^{2k}}$ is Conv

by C-Test $\sum_{k=3} \frac{k^2-5}{e^{2k}+3}$ is Conv

كيف عرفنا انه $\frac{1}{e^2} < 1$ ؟

$2.178 = e^1 > 1 \Rightarrow e^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{e^2} < 1$

عند القلب تقلب اشارة المتباينة .

(4) $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{-2+\ln k}{1+e^k}$

by C-Test

لان بسط $\ln k - 2$

$$\frac{-2+\ln k}{1+e^k} < \frac{\ln k}{1+e^k} < \frac{\ln k}{e^k}$$

$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$ by R-Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{e^{k+1}} \cdot \frac{e^k}{\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{\cancel{e^k}\cdot e} \cdot \frac{\cancel{e^k}}{\ln k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{e\ln k} \quad \frac{\infty}{\infty}$$ باستخدام لوبيتال

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{e}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{ek+e} = \frac{1}{e} < 1$$

by R-Test $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$ is Conv

by C-Test $\sum_{k=10}^{\infty} \frac{-2+\ln k}{e^k}$ is Conv

⑤ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + k^2}{k! + 3}$

by C-Test

$\frac{5^k + k^2}{k! + 3}$

في البسط (+) والمقام (+)
← نتخلص من وحدة (من البسط
ونوزع المقام) ولكن هنا لا يوجد ثوابت في
البسط لنتخلص منها لذلك نحذف من المقام ونكمل الحل هكذا:-

$$\frac{5^k + k^2}{k! + 3} < \frac{5^k + k^2}{k!} = \frac{5^k}{k!} + \frac{k^2}{k!}$$

حذفت 3+ من المقام ووزعت البسط على المقام (عنا 2 series) بنحل كل
وحدة لحال:-

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ by R-Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{5^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{5^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{5^k}\cdot 5}{(k+1)\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{5^k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{5}{k+1} = 0 < 1$$

→ by R-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ is Conv

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ by R-Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k^2} = 0 < 1$$

→ by R-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ is Conv

→ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + k^2}{k!}$ is Conv

حاصل جمع
two converges
series is conv

⇒ by C-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + k^2}{k! + 3}$ is Conv.

(6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7\cos^2 k}{k!}$

by C-Test

(ناخذ الحدود الموجبة عند التربيع لان المقدار التربيعي دائماً 0 إلى)

$$-1 \le \cos(k) \le 1$$

$$0 \le \cos^2 k \le 1$$

$$7\cos^2 k \le 7$$

$$\frac{7\cos^2 k}{k!} \le \frac{7}{k!}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k!}$ by R-Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{7}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{7} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{7}}{(k+1)\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{7}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

by Ratio-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{k!}$ is conv.

by C-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7\cos^2 k}{k!}$ is conv.

7) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

by R - Test

$$\lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!\,(k+1)!}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{k!\,k!}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cancel{k!}\,(k+1)\cancel{k!}}{(2k+2)(2k+1)\cancel{(2k)!}} \cdot \frac{\cancel{(2k)!}}{\cancel{k!}\,\cancel{k!}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{(k+1)}\,\cancel{(k+1)}}{2\cancel{(k+1)} \cdot 2\cancel{(k+1)}} = \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{k=0} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ is Conv.

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7k+4}{3k-2}\right)^{k}$ by "Root - Test"

$$\lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{7k+4}{3k-2}\right)^{k}}_{a_k}\right)^{1/k}$$

الأس مع $\frac{1}{k}$ بروحوا بعض

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{7k+4}{3k-2} = \frac{7}{3} > 1$$

$\Rightarrow$ by Root - Test $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7k+4}{3k-2}\right)^{k}$ is div

(9) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ by "Root - Test"

$$\lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right)^{1/k}$$

الأس

$\boxed{\frac{k^2}{k} = k}$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{k}{k}}{\frac{k+1}{k}}\right)^{k}$$

قسمت البسط والمقام على k

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ by Root - Test $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ is Conv

انتهت اختبارات الحدود الموجبة.

الآن، سنبدأ باختبارات الحدود السالبة

وهي أقل وأسهل من الموجبة (ولكنهم متكاملين)

اختبارات الحدود السالبة

Alternating series

هي سيريز تنتج حد سالب وحد موجب بالتناوب.

* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \Rightarrow -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \dots$

* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \Rightarrow a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$

a_k موجبة والإشارة تنتج من $(-1)^k$ و $(-1)^{k+1}$

أول حد سالب ⇓ أول حد موجب ⇓

* لهذا الشكل alternating ser. اختبار خاص يسمى alternating ser. Test ولكن يمكن أن يُحل باختبارات أخرى (هي Ratio and Root Tests) سنتحدث عنها لاحقاً *

$\boxed{1}$ Alternating series Test (AL-ser) اختصاره (alternating series)

Let $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ be an AL-ser.

- If $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ Then $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ div

اذا النهاية لـ a_k فقط (بدون $(-1)^k$) لا تساوي صفر فإن السيريز كامل div.

- If $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ and $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots$ ($\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dec)

Then $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ is conv.

اما اذا كانت النهاية لـ a_k فقط تساوي صفر وكان ناتج تعويض الحدود في a_k فقط متناقص فإن السيريز conv

ملاحظة: $(-1)^k$ و $(-1)^{k+1}$ وظيفتها تحديد الاشارة فقط (لا تؤخذ مع النهاية)

نعرف اذا كانت dec أو لا ← إما بالتعويض في a_k
← أو باختبار المشتقة الأولى.

لا نستطيع ايجاد قيمة المجموع هنا، فقط نحدد إذا conv أو div!

Ex) Determine whether the series conv. or div (or test the conv.) → نفس السؤال

① $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{k+1}{4k+1}$ AL-ser, $a_k = \dfrac{k+1}{4k+1}$

by AL-ser. Test

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{4k+1} = \frac{1}{4} \neq 0$$

→ The series $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \dfrac{k+1}{4k+1}$ is div.

② $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \dfrac{k+3}{k(k+1)}$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k(k+1)} = 0$$

الجواب صفر اذاً نتحقق من الشرط الثاني

(عوّضنا بأول مجموعة من الحدود في a_n)

$$\underset{k=1}{\frac{4}{2}} > \underset{k=2}{\frac{5}{6}} > \underset{k=3}{\frac{6}{12}} > \underset{k=4}{\frac{7}{20}} > \underset{k=5}{\frac{8}{30}} > >>$$

$\dfrac{\text{dec}}{\text{يتناقص}}$

by AL-ser Test $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \dfrac{k+3}{k(k+1)}$ is conv.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k}$

$\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$

كلما زاد المقام قلت القيمة

$\frac{1}{e} > \frac{1}{e^2} > \frac{1}{e^3} > \frac{1}{e^4} >>>> \text{(dec)}$

by AL-ser. Test $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k}$ is Conv.

(4) $\sum_{k=e}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\ln k}{k}$

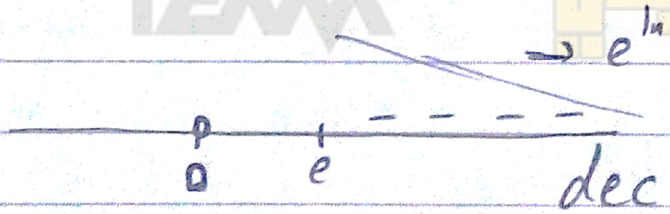
$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0$ (by using L'hopital's Theorem)

هنا نحدد اذا كان متناقص أم لا عن طريق اختبار المشتقة الأولى (بسبب وجود $\ln k$)

$(a_k)' = \left(\frac{\ln k}{k}\right)' = \frac{k\left(\frac{1}{k}\right) - \ln k}{k^2} = \frac{1 - \ln k}{k^2} = 0$

$1 - \ln k = 0 \rightarrow \ln k = 1$

$\rightarrow e^{\ln k} = e^1 \rightarrow k = e$



$\rightarrow$ by AL-ser. Test $\sum_{k=e}^{\infty} (-1)^{k} \frac{\ln k}{k}$ is Conv.

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ / $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots \text{(dec)}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ is div

$\sum b_k \Rightarrow b_1 + b_2 - b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + b_7 + b_8 - \cdots$

لاحظ انه ليس Alternating (الاشارات غير مرتبة)

$\sum |b_k| \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + \cdots$

لو أخذنا مطلق كل حد ، نستطيع معرفة اذا كان $\sum b_k$ conv أو div (لأنه الصفات تتوارث ^^)

Def_n

* If $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ is conv. Then $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ is called Converge absolutely

اذا المطلق conv ⇐ السيريز الأصلي يسمى conv. abs.

(لما ماعرفنا اذا الاصلي conv او div)

* If $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ is div. Then $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ is called Diverge absolutely

اذا المطلق div ⇐ السيريز الأصلي يسمى div. abs.

(لما ماعرفنا اذا الاصلي conv او div)

مُجرَّد تشبيات ♡

Theorem:

نحدد المطلق

$\boxed{1}$ If $\sum |b_k|$ is conv. Then $\sum b_k$ is conv.
(that is if $\sum b_k$ is conv-absolutely Then
$\sum b_k$ is conv)

(اذا المطلق conv. يؤدي إلى أن الأصل conv. absolutely)
(conv فالأصل conv)

$\boxed{2}$ If $\sum |b_k|$ is div. Then $\sum b_k$ is → conv or div

(If $\sum |b_k|$ is div and $\sum b_k$ is conv. Then
$\sum b_k$ is called "converge conditionally")

اذا المطلق div فالأصل غير محدود (ممكن conv, ممكن div)
(ولكن اذا المطلق div والأصل conv (معلوم)
نطلق عليه "converge conditionally")

$\boxed{3}$ If $\sum b_k$ is div. Then $\sum |b_k|$ is div

نحدد السيريز الأصلي

اذا الأصل div فالمطلق اجباري div

$\boxed{4}$ If $\sum b_k$ is conv. Then $\sum |b_k|$ → conv or div

النتيجة

$\sum b_k$ →
- Conv-abs. → $\sum b_k$ conv, $\sum |b_k|$ conv.
- div → $\sum b_k$ div, $\sum |b_k|$ div.
- Conv-conditionally → $\sum b_k$ conv, $\sum |b_k|$ div

هذه الحالات تعطي معلومات عن الأصل و مطلقها

Ex| Test the absolute or conditionally convergent

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

لمطلق يعني حذف الجزء الذي ينتج الإشارات (وهو $(-1)^k$ أو $(-1)^{k+1}$)

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ G-ser $a = 1$, $r = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ conv

اذا المطلق conv ما الأصل conv

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$ converge absolutely

لاحظ أننا عدنا للتعامل مع الاختبارات الموجبة

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (p-ser) $\Rightarrow$ div $\Rightarrow$ هذا لا يعني ان الاصل div

هذا السيريز alternating ← لم نحدد اذا كان div أو Conv. condi ، يجب معرفة الأصل ما هو بالضبط (div أو conv)

by Alternating series test

$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$ and $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > >$ (dec)

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ is conv $\Longrightarrow$ Converge conditionally

(لأنه المطلق div والأصل conv)

3 Ratio - Test for absolute Conv.

مهم

* في اختبارات الحدود السالبة، أول اختبار نستخدمه هو Ratio (أو Root) لأنه لا يحتاج إلى فصل، ولكن اذا فشل نلجأ لعملية الفصل.

← اذاً Ratio يستخدم للحدود السالبة ايضاً (منها AL-ser)

* Let $\sum b_k$ be a series and

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = L$$

1. If $L<1$ Then $\sum b_k$ is "Conv-abs" → $\sum b_k$ is Conv, $\sum |b_k|$ is Conv
2. If $L>1$ or $L=\infty$ Then $\sum b_k$ is "div" → $\sum b_k$ is div, $\sum |b_k|$ is div
3. If $L=1$, Fail

4 Root - Test for absolute conv.

* Let $\sum b_k$ be a series and

$$\lim_{k\to\infty} (|b_k|)^{1/k} = L$$

1. If $L<1$ Then $\sum b_k$ is "Conv-abs" → $\sum b_k$ is conv, $\sum |b_k|$ is conv
2. If $L>1$ or $L=\infty$ Then $\sum b_k$ is "div" → $\sum b_k$ is div, $\sum |b_k|$ is div
3. If $L=1$, Fail

توضيح :-

Ratio ← يستخدم غالباً عند وجود المضروب.

الحل: ١) نجد $|b_{k+1}|$ حيث نقوم بتعويض $(k+1)$ مكان كل

k والمطلوب يعني إزالة الجزء الذي يُظهر السالب وهو $(-1)^k$ أو $(-1)^{k+1}$

نجد $|b_k|$ أيضاً بإزالة $(-1)^k$ أو $(-1)^{k+1}$ (يعني الجزء الذي يُظهر السالب لأنه يوجد أمثلة تنتج السالب مع وجود $(-1)^k$)

٢) نجد النهاية لـ $\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}$

Root ← يستخدم غالباً عند وجود الأس التي تحتوي على k

الحل: ١) نجد $(|b_k|)^{1/k}$ حيث أن $|b_k|$ هو إزالة الجزء الذي يظهر السالب ثم نجد $(|b_k|)^{1/k}$

٢) نجد النهاية لـ $(|b_k|)^{1/k}$

شروط Ratio و Root :-

٣) اذا كان الجواب أقل من واحد يكون السيريز Conv-abs < الأصل Conv / المطلق Conv

اذا كان الجواب أكبر من واحد أو يساوي ∞ يكون السيريز div < الأصل div / المطلق div

واذا كان الجواب يساوي واحد فالاختبار فاشل (نلجأ لغيره)

* اذا فشل Ratio أو Root لا يعني انها Conv-cond ، ولكن اذا طبقنا Ratio أو Root على Conv-cond سيفشل الاختبار *

Ex Classify each series → absolutely conv.
→ conditionally conv.
→ div

[1] $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(3k-2)!}$ AL-ser

وحل الحل باستخدام Ratio لـ
اسهل (بسبب وجود المضروب)

by R-Test – II ← يعني للطلق

$$|b_k| = \left| \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(3k-2)!} \right| = \frac{(2k)!}{(3k-2)!}$$

$$|b_{k+1}| = \frac{(2(k+1))!}{(3(k+1)-2)!} = \frac{(2k+2)!}{(3k+1)!}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(3k+1)!} \cdot \frac{(3k-2)!}{(2k)!}$$ ضرب بالمقلوب يعني قسمة

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)\cancel{(2k)!}}{(3k+1)(3k)(3k-1)\cancel{(3k-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(3k-2)!}}{\cancel{(2k)!}}$$

$= 0 < 1$

لـ درجة البسط 2 (عدد k) / درجة المقام 3 (عدد k)

→ by R-Test – II

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(3k-2)!}$ is conv-abs < $\sum b_k$ conv ; $\sum |b_k|$ conv

② $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{k^5}{e^k}}_{b_k}$ by R-Test-II

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^5}{e^{k+1}} \cdot \frac{e^k}{k^5}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^5}{\cancel{e^k}\cdot e} \cdot \frac{\cancel{e^k}}{k^5} = \frac{1}{e} < 1$$

by R-Test-II $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^5}{e^k}$ is conv-abs.

③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1.3)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k\, 3^k}{k^2}}_{b_k}$ Al-ser

by Ratio-Test-II

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{3^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{3^k}\cdot 3}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{\cancel{3^k}} = 3 > 1$$, by R-Test-II

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^2}$ is div

④ $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{\ln k}\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\ln k)^k}$, by Root-Test

لانه فيها يحتوي على K

$$\lim_{k\to\infty} (|b_k|)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\left|\frac{(-1)^k}{(\ln k)^k}\right|\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(\ln k)^k}\right)^{1/k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{1}{\ln k}\right)^k\right)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1$$

$\sum b_k \Longrightarrow$ Conv-abs

٢٠٢ (5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+3)}{k(k+1)}$ Al-ser

by R_Test-II

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+4)}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k(k+1)}{(k+3)} = 1$$

Test Fail

انتهى دور R-Test اذا كان في الموجب أو السالب ، ننتقل إلى طريقة الفصل (ولو نستخدم R-Test للموجب لأنه سيفشل أيضاً)

* السؤال لا يريد conv أو div ، المطلوب هو تصنيف الشكل ، لهذا Al-ser Test لا يلغي لنحدد اذا كان conv-abs / conv-cond / div

أهم فقرة في الكورس

هل نبدأ الحل بالمطلق أم بالسيريز نفسه ؟
الجواب هو (ابدأ كما تريد ^^) ، لماذا؟ لأنه لو بدأت بالمطلق وكان الجواب div سيكون عليك ايجاد الأصل ان كان conv أو div ولكن اذا كان المطلق conv لا داعي لإيجاد الأصل لأنه سيكون conv بالتأكيد.
أما اذا بدأت بالأصل وكان الجواب conv فالمطلق قد يكون conv أو div ولكن اذا كان div فالمطلق سيكون div بدون ايجاد الأصل.
وبالتالي ابدأ كما تريد ...

solution (5): سوف أختار الطلب للبدء به لا يجوز انه تبدأ بالأصل عادي؟

$\boxed{1}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}(k+3)}{k(k+1)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^2+k}$

مابنحل على Ratio ابدآ لانه سيفشل بالتأكيد

by limit C-Test

$b_k = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ and $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div

$\lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{\cancel{k}(k+1)} \cdot \frac{\cancel{k}}{1} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ by L-C. Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^2+k}$ is div

الطلب div ← يجب فحص الأصل

$\boxed{2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+3)}{k(k+1)}$ by AL-ser Test

* $\lim_{k\to\infty} \frac{k+3}{k(k+1)} = 0$

* a_k dec? $\longrightarrow \frac{4}{2} > \frac{5}{6} > \frac{6}{12} > \dots$ (dec)

by AL-ser Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+3)}{k(k+1)}$ is conv

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+3)}{k(k+1)}$ conv-conditionally

امثلة مهمة :-

(6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$

$(\cos k) \Leftarrow$ بعض القيم التي تنتج منها سالبة وبعضها موجبة

$\Leftarrow$ تنتج الاشارات $\Leftarrow$ نأخذ المطلق

استخدمت الفصل وبدأت بالمطلق

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{k^2}$$

(المقام دائماً موجب لانه تربيع)

by C- Test $\quad |\cos k| \leq 1$

$$\frac{|\cos k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

but $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ is conv

(المطلق conv اذاً الاصل conv لا داعي لفحص الاصل)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{k^2} \text{ conv} \Rightarrow \text{conv-abs.}$$

(7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k^5}$

$\cos(\pi k) = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

اذاً نستبدلها بـ $(-1)^k$ لانها تساويها

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^5} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \quad \text{p-ser} \rightarrow \text{conv}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k^5} \text{ conv-abs.}$$

استخرجت الفصلويات ال ال

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(\pi k)}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1}$ Al-ser

by AL-ser Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1}$

① $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2+1} = 0$

② a_k dec? $\Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > > >$ (dec)

$\Rightarrow$ by AL-ser Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{k^2+1}$ conv

الاصلي conv $\Leftarrow$ نفحص المطلق

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k k}{k^2+1}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

by L-C-Test

$b_k = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ is div

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2+1} \cdot \frac{k}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} = 1 > 0$

by L.C. Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$ div

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(\pi k)}{k^2+1}$ is conv-conditionally

احفظوها ^^ (7) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$ is div.

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{k^2}$ اختبار موجب

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} k < \frac{\pi}{2}$$

اخذت الحدود الموجبة فقط $0 < \frac{\tan^{-1} k}{k^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{k^2}$ p-ser $\Rightarrow$ conv

ثابت $(\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ by C-Test

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} k}{k^2}$ is conv