فريق كهربجي

يقدم

الدفتر الشامل لمادة

كالكولاس2

للطالبة : رهف الهامي

#اخلاصا_بذلا_اتقانا

Scanned by CamScanner

"بسم الله الرحمن الرحيم"

مادة الفيرست :-

* تكملة للتكاملات بالإضافة لأنواع جديدة

مثل :

- Integration by parts

التكامل بالأجزاء

- Trigonometric substitutions

- Partial fraction

* موضوع يجمع بين النهايات والتكاملات

Improper Integrals

* Sequences

* رح نبدأ بمراجعة لبعض التكاملات الأساسية

خطي ← linear

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\qquad \int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

3) $\int e^x \, dx = e^x + c$ $\qquad \int e^{(ax+b)} \, dx = \dfrac{1}{a} e^{(ax+b)} + c$

4) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ $\qquad \int \sin(ax+b) \, dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ $\qquad \int \cos(ax+b) \, dx = \dfrac{\sin(ax+b)}{a} + c$

6) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$ $\qquad \int \sec^2(ax+b) \, dx = \dfrac{\tan(ax+b)}{a} + c$

7) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$ $\qquad \int \csc^2(ax+b) \, dx = \dfrac{-\cot(ax+b)}{a} + c$

8) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$ $\qquad \int \sec(ax+b) \tan(ax+b) \, dx = \dfrac{1}{a} \sec(ax+b) + c$

9) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$ $\qquad \int \csc(ax+b) \cot(ax+b) \, dx = \dfrac{-1}{a} \csc(ax+b) + c$

10) $\int b^x \, dx = \dfrac{b^x}{\ln b} + c$

11) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c$

12) $\int \tan x \, dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

13) $\int \cot x \, dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x| + c$

* $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$ مشتقة $\cos^{-1}$ نفسها ← بس سالب

* $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$ مشتقة $\cot^{-1}$ نفسها ← بس سالب

* $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2-1}}$ مشتقة $\csc^{-1}$ نفسها ← بس سالب

* $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

* $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$ ما معها $\frac{1}{a}$ ^^

* $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\left|\frac{x}{a}\right|\right)+c$

- $\int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$ بنفضل حفظه

$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx = \ln|\sec x+\tan x|+c$

ضربنا وقسمنا $\sec x+\tan x$ ← أصبح البسط مشتقة المقام

- $\int \csc x\,dx = \int \csc x \cdot \frac{\csc x+\cot x}{\csc x+\cot x}\,dx = -\ln|\csc x+\cot x|+c$

OR

$= \ln|\csc x-\cot x|+c$

Examples

① $\int \frac{1}{3+x^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt{3})^2 + x^2}\,dx$ حولت التكامل للصورة العامة

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$ لتكامل $\tan^{-1}$

② $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$ المقام لا يحلل ← إكمال مربع (نضيف ونطرح $\frac{1}{2}$ معامل x تربيع بشرط أن يكون معامل x^2 يساوي واحد)

معامل x واحد ← بقسمه على 2 وبربعه

معامل x^2 واحد تحقق الشرط

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$ نفرض لأنها ليست على الصورة العامة لتكامل $\tan^{-1}$

let $w = x + \frac{1}{2}$

نشتق → $dw = dx$

$= \int \frac{1}{w^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dw = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{w}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$ عوضنا مكان w قيمتها

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

③ $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}$ let $w = e^x \rightarrow dw = e^x dx \rightarrow dx = \frac{dw}{w}$

$= \int \frac{dw}{w\sqrt{w^2-4}} = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\left|\frac{w}{2}\right|\right) + c = \frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\left|\frac{e^x}{2}\right|\right) + c$

← نفرضنا e^x وليس e^{2x} (لأنه بدنا اقترانه مربع وليس اقترانه) لما عوضنا الفرض نتجت الصورة لتكامل $\sec^{-1}$

④ $\int x^2 \cos(x^3+1)\, dx$ عبارة x^3+1 مشتقته موجودة
اذاً نفرضه (ما بيهمني الثوابت)

مشتقته

$= \int \cancel{x^2} \cos w \frac{dw}{3\cancel{x^2}}$ let $w = x^3+1$

$dw = 3x^2\, dx$

$= \int \frac{1}{3} \cos w\, dw$ $dx = \frac{dw}{3x^2}$

$= \frac{1}{3} \sin w + c = \frac{1}{3} \sin(x^3+1) + c$

⑤ $\int x \tan(x^2)\, dx$ let $w = x^2$

مشتقته

$dw = 2x\, dx$

$= \int \cancel{x} \tan w \frac{dw}{2\cancel{x}}$ $dx = \frac{dw}{2x}$

$= \frac{-1}{2} \ln|\cos w| + c = \frac{-1}{2} \ln|\cos x^2| + c$

نستنتج من آخر مثالين 4 و 5 ⟸ اذا كان عندي اقتران مثلثي داخله اقتران مشتقته موجودة (مضروبة بالاقتران المثلثي)
⟸ تكاملهم بجيب ← الرقم (الثابت الموجود في التكامل)

أي الاقتران يلي مشتقته موجودة (يلي داخل الاقتران المثلثي)

• تكامل الاقتران المثلثي (نبقي الزاوية كما هي)

$\int x \tan(x^2)\, dx = \frac{-1}{2} \ln|\cos(x^2)| + c$

الثابت واحد

x^2 هو الاقتران يلي مشتقته موجودة (الأس = 2)

تكامله $\ln|\cos| = \tan$

الأس

⑥ $\int 5x \sec(x^2+1)\, dx = \frac{5}{2} \ln|\sec(x^2+1) + \tan(x^2+1)| + c$

الثابت

الاقتران مشتقته موجودة

Integration by parts ← التكامل بالأجزاء

يستخدم للتكاملات التي لا تحل بالتعويض (يعني لا يوجد اقتران مشتقة الآخر داخل التكامل)

القاعدة العامة للتكامل بالأجزاء

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

لو كان تكامل محدود

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

توضيح طريقة الحل بمثال ⇐

$$\int 2x \cos x\,dx = \int u\,dv$$

بدنا نجزأ يلي داخل التكامل لجزأين ، جزء أفرضه u واشتقه وجزء أفرضه dv وأكامله

بوي احتار صح لأنه من التكامل بالأجزاء رح ينتج عندي تكامل جديد

let $u = 2x$ $\qquad dv = \cos x\,dx$

نشتق $du = 2\,dx$ $\qquad v = \sin x$ تكامل

نضرب

ناقص تكامل $v\,du$

$$u \cdot v - \int v\,du$$

$$= 2x \sin x - \int 2 \sin x\,dx$$

نحل التكامل الجديد بأحد طرق التكامل

$$= 2x \sin x + 2\cos x + c$$

اخترت $u = 2x$ لأنه لما اشتقها بروح x (بتبسط الحل)

لو كاملتها بتصير $2\frac{x^3}{3}$ ما بستفيد رح يصير عندي تكامل $\frac{2}{3}x^3 \sin x$

Ex] $\int_0^4 x e^{-x}\, dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \xleftarrow{\int} v = -e^{-x}$

① نفصل التكامل

e^{-x} ← برجع تضل نفسها (بس بتأخذ سالب)

$= -xe^{-x}\Big|_0^4 - \int_0^4 -e^{-x}\, dx$

② $u \cdot v - \int v\, du$

③ نكامل

$= -x e^{-x}\Big|_0^4 + -e^{-x}\Big|_0^4 = -x e^{-x} - e^{-x}\Big|_0^4$

④ ← حدود التكامل متماثلة (احنا ناخذهم مرة وحدة)

$= \left(-4e^{-4} - e^{-4}\right) - \left(0 - e^{0}\right)$

$= \dfrac{-4}{e^4} - \dfrac{1}{e^4} + 1 = \dfrac{-5}{e^4} + 1$

Ex] $\int \ln x\, dx$

التكاملات يلي بتحتوي على ln ← على الأغلب أجزاء وبنفرضها $u = \ln x$ وبنشتقها والجزء الآخر هو dx ← نفرضه dv وبنكامله

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{x}\, dx \xleftarrow{\int} v = x$

$= x \ln x - \int x \dfrac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1\, dx$

$= x \ln x - x + c$

Ex] $\int x^2 \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = \dfrac{x^3}{3}$

$= \dfrac{x^3}{3} \ln x - \int \dfrac{1}{3} x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \dfrac{1}{9} x^3 + c$

التكاملات التي تحتوي على اقترانات مثلثية عكسية ← أجزاء
ونفرضها u

Ex) $\int \tan^{-1}x \, dx$

$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad v = x$

فرضنا وطبقنا القاعدة

$= x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

التكامل الجديد ← المقام مشتقة للبسط (مفقود 2)
$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$

Ex) $\int x\tan^{-1}x \, dx$

$u = \tan^{-1}x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

طالعت $\frac{1}{2}$ برة التكامل، سميناه $I \leftarrow \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ (يعني أعطيه اسم جديد)

وحل التكامل I

$I = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

إذا كان أس البسط أكبر أو يساوي أس المقام ⟸ قسمة طويلة

المقسوم

$$I = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

المقسوم عليه

فأخذ أكبر أس من المقسوم ونقسمه على أكبر أس من المقسوم عليه

$1 = \frac{x^2}{x^2}$ ← نضعه عند الناتج

الناتج ← 1 ، ضرب

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 1+x^2 & x^2 \\ & -x^2+1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

الباقي

نطرح أو نغير اشارات الجزء الأسفل ونجمع

أس الباقي (صفر) < أس المقسوم عليه

اذاً انتهت عملية القسمة

(لو كانت أكبر أو يساوي نتابع القسمة)

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{= \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}}$$

$$I = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \underbrace{x - \tan^{-1}x}_{\text{ناتج } I}$$

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1}x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

Ex $\int \cos^{-1} x \, dx$

$u = \cos^{-1} x \qquad dv = dx$

$du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad v = x$

$= x \cos^{-1} x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad = x\cos^{-1} x + \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{I}$

سميها I

$I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

ما داخل الجذر مشتقة
موجودة ← تعويض

let $w = 1 - x^2$

$dw = -2x \, dx$

$dx = \frac{dw}{-2x}$

$I = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{w}} \frac{dw}{-2\cancel{x}} = \frac{-1}{2} \int w^{-\frac{1}{2}} dw$

$\frac{1}{\sqrt{w}} = w^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{-1}{2} \frac{w^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot w^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{w} = -\sqrt{1-x^2}$ جواب I

حوّلنا أس $\frac{1}{2}$ إلى جذر

عوضنا قيمة w

$\int \cos^{-1} x = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$

* ما ننسى أول جزء من حل التكامل
* ثابت التكامل c يوضع في آخر حل التكامل (يعني بعد اختفاء اشارة التكامل)

تمرينه

① $\int x^2 e^x \, dx$

② $\int x^2 \ln(x^2+1) \, dx$

③ $\int (\ln x)^2 \, dx$

④ $\int \tan^{-1}(5x) \, dx$

⑤ $\int \tan^{-1}(\sqrt{x}) \, dx$

⑥ $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

⑦ $\int e^x \sin x \, dx$

حـلـول التمـارين ^.^

① $\int x^2 e^x\,dx$

في الغالب نفرض dv هي e^x (لأنه مشتقتها وتكاملها واحد) ولما نشتقه $x^2 \Leftarrow 2x$ يقل التكامل درجة

$u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$

$= x^2 e^x - \underbrace{\int 2x e^x\,dx}_{I}$ $\Rightarrow$ ما اختفت x وما بقدر أحل التكامل بالتعويض

$\Leftarrow$ الحل: أجزاء مرة أخرى لـ I

$I = \int 2x e^x\,dx$

$u = 2x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = e^x$

$\int 2x e^x\,dx = 2xe^x - \underbrace{\int 2e^x\,dx}_{\text{تكامل مباشر}} = 2xe^x - 2e^x$

$\Rightarrow \int x^2 e^x\,dx = \underbrace{x^2 e^x}_{\text{ما ننسى أول جزء}} - (2xe^x - 2e^x) + c$ $\rightarrow$ لازم أحط أقواس

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$

② $\int x^2 \ln(x^2+1)$

لو كان $\int x \ln(x^2+1)$
⇐ تعويض

$u = \ln(x^2+1) \qquad dv = x^2\,dx$

$du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \qquad v = \dfrac{x^3}{3}$

u تأخذ ln دائماً

مشتقة ln ⇐ مشتقة ما داخله
ما داخله

$$\int x^2 \ln(x^2+1) = \frac{x^3}{3}\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx}_{I}$$

خلي الثوابت خارج التكامل ليسهل التعامل مع I

$$I = \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$$

أس البسط > أس المقام
⇐ قسمة طولية

$x^2 = \dfrac{x^4}{x^2}$

$-1 = \dfrac{-x^2}{x^2}$

ضرب

$x^2 - 1$ ← الناتج

$x^2+1 \,\big)\, x^4$

$-\;\; x^4 + x^2$

$-x^2$

$-\;\; -x^2 - 1$

1 ← الباقي

$$\frac{x^4}{x^2+1} = (x^2-1) + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int x^2 - 1\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x \implies \text{جواب } I$$

$$\int x^2 \ln(x^2+1) = \frac{x^3}{3}\ln(x^2+1) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1}x\right) + C$$

③ $\int (\ln X)^2 \, dx$

عندي $\ln X \ln X$ موجودة
⇐ بفرض $u=(\ln X)^2$
ونشتقه ، وبفرض $dv=dx$
ونكامل

$u=(\ln X)^2 \qquad dv=dx$

$du = \frac{2\ln X}{X}dx \qquad v=X$

$$\int (\ln X)^2 dx = X(\ln X)^2 - \int \frac{2\ln X}{\cancel{X}} \cancel{X} \, dx$$

$$= X(\ln X)^2 - 2\underbrace{\int \ln X \, dx}_{I}$$

اجزاء مرة اخرى لـ I فقط

$I = \int \ln X \, dx$

$u = \ln X \qquad dv = dx$

$du = \frac{dx}{X} \qquad v = X$

$I = X\ln X - \int \frac{dx}{\cancel{X}} \cancel{X} = X\ln X - X$ ⇐ جواب I

$$\Rightarrow \int (\ln X)^2 = X(\ln X)^2 - 2(X\ln X - X) + C$$

④ $\int \tan^{-1}(5X) \, dx$

$u = \tan^{-1}5X \qquad dv = dx$

$du = \frac{5}{1+25X^2}dx \qquad v = X$

$$= X\tan^{-1}5X - \underbrace{\int \frac{5X}{1+25X^2} dx}_{I}$$

I ⇐ المقام مشتقة للبسط
بس ناقصه 10 ⇐ 50X
⇐ بأخذ الجواب ($\frac{1}{10}\ln$ المقام)

$$= X\tan^{-1}5X - \frac{1}{10}\ln|1+25X^2| + C$$

(5) $\int \tan^{-1}(\sqrt{x})\,dx$

((ابدأ بالفرض (التعويض)) $w=\sqrt{x}$ افرض ⟸ لتسهيل الحل

(الزاوية ليست خطية)

نبدأ بالفرض

let $w=\sqrt{x}$

اشتق $dw = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow dx = 2\sqrt{x}\,dw$

$dx = 2w\,dw$

تعويض

$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})\,dx = \int 2w\tan^{-1}w\,dw$

التجزاء

$u=\tan^{-1}w \qquad dv = 2w\,dw$

$du = \frac{1}{1+w^2}\,dw \qquad v = w^2$

نشتق ونكامل بالنسبة لـ w وليس X

$= w^2\tan^{-1}w - \int \frac{w^2}{1+w^2}\,dw \quad I$

ضرب

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ 1+w^2 & w^2 \\ & -w^2+1 \\ \hline & -1 \end{array}$$

$\left\{\frac{w^2}{w^2}=1\right.$

$I = \int 1\,dw - \int \frac{1}{1+w^2}\,dw$

وليس X $= w - \tan^{-1}w$

$\int 2w\tan^{-1}w\,dw = w^2\tan^{-1}w - w + \tan^{-1}w + C$

$\int \tan^{-1}(\sqrt{x})\,dx = x\tan^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \tan^{-1}(\sqrt{x}) + C$

عوضنا مكان كل w قيمتها يلي فرضناها

⑥ $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ افرض $w = \sqrt{x}$ وابدأ تعويض

let $w = \sqrt{x}$

$$dw = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, dw$$

$$dx = 2w\, dw$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \underbrace{\int 2w\, e^{w}\, dw}_{\text{اجزاء}}$$

$u = 2w \qquad dv = e^{w}\, dw$

$du = 2\,dw \qquad v = e^{w}$

$$= 2we^{w} - \int 2e^{w}\, dw = 2we^{w} - 2e^{w} + c$$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$$

مهم

⑦ $\int e^{x} \sin x\, dx$

يسمى تكامل دوّار (لأنه ينتج معنا تكامل يحل بالأجزاء دائماً ⇐ نتخلص منه عن طريق انتاج تكامل نفس التكامل المطلوب ونقله على الطرف الآخر والقسمة على 2

$u = \sin x \qquad dv = e^{x}\, dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = e^{x}$

$$\int e^{x} \sin x\, dx = e^{x}\sin x - \underbrace{\int e^{x}\cos x\, dx}_{\text{اجزاء مرة أخرى}}$$

$u = \cos x \qquad dv = e^{x}\, dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = e^{x}$

$$\int e^{x} \sin x\, dx = e^{x}\sin x - \left(e^{x}\cos x + \int e^{x}\sin x\, dx\right)$$ دخل السالب

$$\int e^{x} \sin x\, dx = e^{x}\sin x - e^{x}\cos x \underbrace{- \int e^{x}\sin x\, dx}$$ نفس التكامل المطلوب انقله على الطرف الثاني

$$2\int e^{x} \sin x\, dx = e^{x}\sin x - e^{x}\cos x$$

اقسم الطرفين على 2

$$\int e^{x} \sin x\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{x}\sin x - e^{x}\cos x\right) + c$$

Ex) $\int e^{2x} \sin(3x)\, dx$ تكامل دوار

$u = \sin(3x)$ $dv = e^{2x}dx$

$du = 3\cos(3x)dx$ $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

لو فرضنا $u = e^{2x}$ واشتقينا و $dv = \sin$ وكاملنا بطلع نفس الحل

$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \underbrace{\int \frac{3}{2}e^{2x}\cos(3x)dx}_{I}$

$u = \cos(3x)$ $dv = \frac{3}{2}e^{2x}dx$ اجزاء مرة اخرى

$du = -3\sin(3x)dx$ $v = \frac{3}{4}e^{2x}$

$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x) - \int \frac{9}{4}e^{2x}\sin(3x)dx$

انقل على الطرف الثاني

$\frac{4}{13}\left(\frac{13}{4}\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)\right)$

$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \frac{4}{13}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \frac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)\right) + C$

Ex) $\int \cos(\ln x)dx$ let $w = \ln x$

$dw = \frac{dx}{x} \rightarrow dx = x\,dw$

$= \int x\cos w\, dw$

$\boxed{x = e^{w}}$ عند اخذ e للطرفين ينتج

$= \int e^{w}\cos w\, dw$ تكامل دوار

(نفس طريقة الحل السابقة)

الجواب النهائي $\rightarrow = \frac{1}{2}x\cos(\ln(x)) + \frac{1}{2}x\sin(\ln(x)) + C$

Ex) $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^2}dx$

$u = xe^{x}$ $dv = (x+1)^{-2}dx$

$du = xe^{x} + e^{x}dx$ $v = \frac{-1}{(x+1)}$

$= \frac{-xe^{x}}{(x+1)} + \int \frac{e^{x}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}dx$ اخرج e^{x} عامل مشترك من البسط

$= -\frac{xe^{x}}{x+1} + e^{x} + C$

Integrating powers of trigonometric fun.

قواعد تكامل اقترانات مثلثية مرفوعة لأس :-

let $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

$\boxed{1}$ $\int \sin^n x \, dx = \frac{-1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$

$\boxed{2}$ $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

Ex| $\int \sin^2 x \, dx = \frac{-1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx$

$= \frac{-1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$

OR $= \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2x) \right) + \frac{1}{2} x + c$

متطابقة

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$

Ex| $\int \sin^3 x \, dx = \frac{-1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx$

$= \frac{-1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + c$

تدريب $\int \cos^2 x \, dx \quad , \quad \int \cos^3 x \, dx$

الحل

$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + c$

$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + c$

لو كانت بدل X ← (X ثابت) ← مثل 5X ← نبدأ الحل بالفرض

Ex] $\int \sin^3(4X)\,dx$ let $w = 4X$ ① الفرض

$dw = 4dx \rightarrow dx = \frac{dw}{4}$

$= \frac{1}{4}\int \sin^3 w\,dw$ ② نغير شكل التكامل ونترك الثابت خارج التكامل

$= \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{3}\sin^2 w\cos w + \frac{2}{3}\int \sin w\,dw\right)$ ③ نكامل حسب القاعدة

$= \frac{-1}{12}\sin^2 w\cos w - \frac{1}{6}\cos w + c$

$= \frac{-1}{12}\sin^2 4X\cos 4X - \frac{1}{6}\cos 4X + C$ ④ نعوض مكان w قيمتها

$\boxed{3}$ $\int \tan^n X\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} X - \int \tan^{n-2} X\,dx$

$\boxed{4}$ $\int \cot^n X\,dx = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} X - \int \cot^{n-2} X\,dx$

Ex] $\int \tan X\,dx = \int \frac{\sin X}{\cos X}\,dx = -\ln|\cos X| + c$

$= \ln|\sec X| + c$

Ex] $\int \tan^2 X\,dx = \tan X - \int dx = \tan X - X + C$

Ex] $\int \tan^3 X\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 X - \int \tan X\,dx$

$= \frac{1}{2}\tan^2 X + \ln|\cos X| + C$

Ex] $\int \tan^4 x\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x\,dx$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c$

$\int \tan^5 x$ ← بنحتاج $\int \tan^3 x$ ... وهكذا

5] $\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$

6) $\int \csc^n x\,dx = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2}x\cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\,dx$

Ex] $\int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

Ex] $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

Ex] $\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$

$= \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$

Ex] $\int \csc x\,dx = \int \csc x \cdot \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}\,dx$

$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x\cot x}{\csc x + \cot x}\,dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

استعملنا المقام $-\csc x\cot x - \csc^2 x$
خذ السالب عامل مشترك

OR $\int \csc x\,dx \cdot \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}\,dx$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x\cot x\,dx}{\csc x - \cot x} = \ln|\csc x - \cot x| + c$

FRANCO NOTEBOOK.

المقام ← $-\csc x\cot + \csc^2 x$ استعمل

البسط

Ex) $\int \csc^3 x\, dx = \frac{-1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \int \csc x\, dx$

$= \frac{-1}{2} \csc x \cot x - \frac{1}{2} \ln|\csc x + \cot x| + c$

Ex) $\int \tan^3(4x)\, dx$ — let $w = 4x$, $dw = 4dx$, $dx = \frac{dw}{4}$

$= \frac{1}{4} \int \tan^3 w\, dw$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \tan^2 w - \int \tan w\, dw \right)$

$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \tan^2 w - \ln|\cos w| \right) + c$

$= \frac{1}{8} \tan^2 4x - \frac{1}{4} \ln|\cos 4x| + c$

عنا مجموعة أشكال بدنا نعرف طريقة تكاملها < تعويضات مثلثيات

Integrals of the form

$\boxed{1}$ $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

case 1) If n is odd "$n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$"
use substitution $\boxed{\text{let } u = \sin x}$

الحالة الأولى ع اذا كان أس cos يلي هو n فردي ع افرض
$u = \sin x$

case 2| If m is odd , use substitution

$\boxed{\text{let } u = \cos x}$

الحالة الثانية : اذا كان أس sin يلي هو m فردي ⟵ افرض $u = \cos x$

في حال كانت n و m فرديات ⟵ نفرض أي وحدة

من الحالة الأولى والثانية ⟵ اذا واحد من الأسس فردي نفرض الجزء الآخر

case 3| If n is even and m is even

$$\boxed{\begin{aligned} \text{use: } \quad & \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ & \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \end{aligned}}$$

اذا كان أس sin و cos زوجيات نستخدم المطابقات

Ex| ① $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ أس cos فردي ⟵ افرض sin

let $u = \sin x$

$du = \cos x \, dx \rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x}$

$\int u^4 \cos^3 x \dfrac{du}{\cos x} = \int u^4 \cos^2 x \, du$ اختصرنا $\dfrac{\cos^{3} x}{\cos x}$

$= \int u^4 (1 - \underbrace{\sin^2 x}_{\text{مطابقة}}) du = \int u^4 (1 - u^2) \, du$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= \int u^4 - u^6 \, du = \dfrac{u^5}{5} - \dfrac{u^7}{7} + C$ كامل

$= \dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{\sin^7 x}{7} + C$ عوض مكان u قيمتها

② $\int \sqrt[3]{\cos^2 3x}\ \sin^5 3x\ dx$ أس ال sin فردي

let $u = \cos 3x$ ← نفرض u=cos

$du = -3\sin 3x\ dx$

$dx = \dfrac{du}{-3\sin 3x}$

$= \dfrac{-1}{3}\int \sqrt[3]{u^2}\ \sin^5 3x\ \dfrac{du}{\sin 3x}$ خلي الثوابت خارج التكامل

$\sqrt[3]{u^2} = u^{\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{-1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}\ \sin^4 3x\ du = \dfrac{-1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}\ (1-\cos^2 3x)^2 du$

$\sin^4 3x = (\sin^2 3x)^2 = (1-\cos^2 3x)^2 \Leftarrow (\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$ متطابقة

$= \dfrac{-1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}(1-u^2)^2\ du$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= \dfrac{-1}{3}\int u^{\frac{2}{3}}(1-2u^2+u^4)\ du$ اضرب القوس بـ $u^{\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{-1}{3}\int u^{\frac{2}{3}} - 2u^{\frac{8}{3}} + u^{\frac{14}{3}}\ du$

$= \dfrac{-1}{3}\left(\dfrac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} - 2\left(\dfrac{3}{11}\right)u^{\frac{11}{3}} + \dfrac{3}{17}u^{\frac{17}{3}}\right) + c$ كامل (خلي $\frac{1}{3}$ خارج التكامل)

$= \dfrac{-1}{5}\cos^{\frac{5}{3}}(3x) + \dfrac{2}{11}\cos^{\frac{11}{3}}(3x) - \dfrac{1}{17}\cos^{\frac{17}{3}}(3x) + c$ دخل $\frac{-1}{3}$ وارجع u لأصلها

في الضرب ← اذا كانت الأساسات متساوية ← ∴ (الأسس تجمع)

عملية توحيد مقامات

مثلاً $u^{\frac{2}{3}} \cdot u^{5} = u^{\frac{2}{3}+\frac{15}{3}} = u^{\frac{17}{3}}$ يعني اذا كان أحد الأسس f

نبسط بمقام والثاني بس نبسط اضرب بمقام الأول واجمع البسطين

والمقام بضل نفسه للثنتين

FRANCO NOTEBOOK.

③ $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$ الأسس زوجية ⇐ متطابقات

$$= \int (\sin^2 x)^2 (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right)^2 \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \right)^2 dx$$

الها متطابقة $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ — الها متطابقة $\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ — (المتطابقة)^2 — (المتطابقة)^2

$$= \frac{1}{16} \int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)^2 \, dx$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

الأسس متساوية ⇐ خلي الأس مشترك للثنتين

$$= \frac{1}{16} \int \left((1-\cos 2x)(1+\cos 2x) \right)^2 dx$$

$(a-b)(a+b) = (a^2 - b^2)$ التوزيع الخارجي مع الخطوة السابقة نضل مثل ما هو

$$= \frac{1}{16} \int (1-\cos^2 2x)^2 \, dx = \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x)^2 \, dx$$

$\left((1)^2 - (\cos 2x)^2 \right)^2$

متطابقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \, dx$$

حل على قاعدة الأسس

OR

$$= \int (\sin x \cos x)^4 \, dx = \int \left(\frac{1}{2} (\sin 2x) \right)^4 dx$$

خلينا الأس للكل — متطابقة $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \, dx \qquad \text{let } u = 2x$$
$$du = 2dx$$
$$= \frac{1}{32} \int \sin^4 u \, du \qquad dx = \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{-1}{4} \sin^3 u \cos u + \frac{3}{4} \int \sin^2 u \, du \right)$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{-1}{4} \sin^3 u \cos u + \frac{3}{4} \int \frac{1}{2} (1-\cos 2u) \, du \right)$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{-1}{4} \sin^3 u \cos u + \frac{3}{8} u - \frac{3}{16} \sin 2u \right) + C$$

$$= \frac{-1}{128} \sin^3 2x \cos 2x + \frac{3}{256}(2x) - \frac{3}{512} \sin 4x + C$$

2 Integrals of the form

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

case 1: If n is even use substitution $\boxed{\text{let } u = \tan x}$

الحالة الأولى: اذا كان أس sec زوجي افرض $u = \tan x$

case 2: If m is odd use substitution $\boxed{\text{let } u = \sec x}$

الحالة الثانية: اذا كان أس tan فردي افرض $u = \sec x$

case 3: If m is even and n is odd

use $\boxed{\tan^2 x = \sec^2 x - 1}$

الحالة الثالثة: اذا كان أس tan زوجي وأس sec فردي استخدم متطابقة

Ex $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx$ أس sec زوجي ← افرض tan

let $u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx \rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cancel{\sec^4 x}^{\sec^2 x} \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$ اختصر

$= \int u^{\frac{1}{2}} (\underbrace{\tan^2 x + 1}_{\text{متطابقة}}) \, du = \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 + 1) \, du$

$= \int u^{\frac{5}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{7} \tan^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{3} \tan^{\frac{3}{2}} x + c$

Ex) $\int \tan^5 x \sqrt{\sec x}\, dx$

let $u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

$dx = \dfrac{du}{\sec x \tan x} = \dfrac{du}{u \tan x}$

$= \int \tan^5 x\, u^{\frac{1}{2}} \dfrac{du}{u \tan x}$

$= \int \tan^4 x\, u^{-\frac{1}{2}}\, du = \int (\sec^2 x - 1)^2\, u^{-\frac{1}{2}}\, du$

$= \int (u^2 - 1)^2\, u^{-\frac{1}{2}}\, du = \int (u^4 - 2u^2 + 1)\, u^{-\frac{1}{2}}\, du$

$= \int u^{\frac{7}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}\, du$

$= \dfrac{2}{9} u^{\frac{9}{2}} - \dfrac{4}{5} u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + C$

$= \dfrac{2}{9} \sec^{\frac{9}{2}} x - \dfrac{4}{5} \sec^{\frac{5}{2}} x + 2\sec^{\frac{1}{2}} x + C$

Ex) $\int \sec x \tan^2 x\, dx = \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx$

فردي   زوجي

$= \int \sec^3 x - \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$

وزع التكامل

$= \underbrace{\dfrac{1}{2} \sec x \tan x + \dfrac{1}{2} \int \sec x\, dx}_{\text{قاعدة تكامل } \sec^3} - \int \sec x\, dx$

ما كاملتها رح اطرحها مع

$= \dfrac{1}{2} \sec x \tan x - \dfrac{1}{2} \int \sec x\, dx$

$= \dfrac{1}{2} \sec x \tan x - \dfrac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$

Ex] $\int e^x \sqrt{\tan(e^x)}\ \sec^4(e^x)\, dx$

الزاوية ليست X ⇐ ابدأ بفرض

Let $u = e^x$

$du = e^x dx \rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$

$= \int \cancel{u} \sqrt{\tan u}\ \sec^4 u \frac{du}{\cancel{u}} = \int \sqrt{\tan u}\ \sec^4 u\, du$

نفس المثال الأول

← اخر خطوة نعوض بدل $u \Leftarrow e^x$

3] Integrals of the form

$\int \cot^m x\ \csc^n x\, dx$

case ①: If n is even use substitution
let $\boxed{u = \cot x}$

اذا كان أس csc زوجي افرض $u = \cot x$

case ②: If m is odd use substitution
let $\boxed{u = \csc x}$

اذا كان أس cot فردي افرض $u = \csc x$

case ③: If m is even and n is odd
→ use: $\boxed{\cot^2 x = \csc^2 x - 1}$

اذا كان أس cot زوجي وأس csc فردي، استخدم متطابقة

* $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ = نفس حالات *

بدل tan ← cot

بدل sec ← csc

Ex $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$ let $u = \cot x$

زوجي ← نفرض cot

$du = -\csc^2 x \, dx$

$dx = \dfrac{du}{-\csc^2 x}$

$= \int u^2 \csc^4 x \dfrac{du}{-\csc^2 x}$

اختصر

$= -\int u^2 \csc^2 x \, du = -\int u^2 (\cot^2 x + 1) \, du$

متطابقة

$= -\int u^2 (u^2 + 1) \, du = -\int u^4 + u^2 \, du$

$= \dfrac{-u^5}{5} - \dfrac{u^3}{3} + c = \dfrac{-\cot^5 x}{5} - \dfrac{\cot^3 x}{3} + c$

دخلت السالب

Trigonometric substitutions

To evaluate the integrals that contains:

1) $\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow$ use substitution $\boxed{x = a\sin\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

2) $\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow$ use substitution $\boxed{x = a\tan\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

3) $\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow$ use substitution $\boxed{x = a\sec\theta}$ $\quad$ if $x \ge a$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

if $x \le -a$ $\quad \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

موضوع جديد اذا ظهرت أحد هذه الأشكال $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ داخل التكامل (حتى لو كانت مضروبة برقم أو باقتران أو كانت في المقام أو كان الجذر كامل مرفوع لأس مثل $\left(\sqrt{3-x^2}\right)^3$ ، يكون الحل بالفرض (وهنا ستظهر معنا θ (ثيتا)) ، اذا ظهر $\sqrt{a^2-x^2}$ نفرض $x = a\sin\theta$

وليش a^2 = وليس u

، اذا ظهر $\sqrt{a^2+x^2}$ نفرض $x = a\tan\theta$ ، واذا ظهر $\sqrt{x^2-a^2}$ نفرض $x = a\sec\theta$ ، اذا كان مع x رقم نبدأ نفرض $(u = bx)$

على $a\sin\theta$

الفترات بس عشان اذا في جذر وعليه تربيع لما يروحوا مع بعض ما ناخذ المطلق ← ما نستفيد منهم :)

Ex) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ ظهرعنا الشكل $\sqrt{a^2-x^2}$

$\longleftarrow \sqrt{(3)^2-x^2}$

اذاً بنفرض $x = a\sin\theta$

3 وليس 9

let $\boxed{x = 3\sin\theta}$

بدنا نوجد ثلاث اشياء :-

* $x^2 = 9\sin^2\theta \longleftarrow$ ① x^2
* $dx = 3\cos\theta\, d\theta$ ② المشتقة (نشتق مادخل المربع يعني يلي فرضناه هو x^2)
* $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta}$ ③ نجد الشكل الموجود في التكامل $\sqrt{9-x^2}$ ونعوض مكان x^2 رقم ① ثم نأخذ 9 عامل

$= \sqrt{9(1-\sin^2\theta)}$

$= \sqrt{9\cos^2\theta} = \sqrt{9}\,\sqrt{\cos^2\theta}$

$= 3\cos\theta$

مشترك نصل $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta \leftarrow$ متطابقة $1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ ، ثم نأخذ الجذر للثابت و لـ $\sqrt{\cos^2\theta}$ (بروح الجذر مع التربيع)

* ما بناخذ مطلق بسبب الفترة يلي حددنا ها بالفرض

$= \int \frac{\overset{①}{9\sin^2\theta}\ \underset{②}{\cancel{3\cos\theta}\, d\theta}}{\underset{③}{\cancel{3\cos\theta}}}$

نعوض يلي طلعناه من 1و2و3 ثم نختصر البسط مع المقام

$= \int 9\sin^2\theta\, d\theta$ صار التكامل بدلالة ثيتا

$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \longleftarrow$ متطابقة

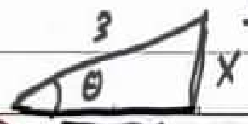
$= \int \frac{9}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C$

تكامل بدلالة ثيتا

لايمكن الاستغناء عن هذه الخطوة $\longrightarrow$ الجواب كامل بدلالة ثيتا ، الآن بدنا نرجعه بدلالة x

$\theta \rightarrow x$

من الفرض $\frac{x}{3} = \frac{3\sin\theta}{3} \rightarrow \sin\theta = \frac{x}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ بنطبق عالمثلث



$\theta = \sin^{-1}\frac{x}{3}$

اقتران عكسي sin inverse

كالكولاس 101

FRANCO NOTEBOOK

$3^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow \sqrt{9-x^2}$

$y^2 = 9 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{9-x^2}$

$\frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C$ ← آخر خطوة وصلنالها

متطابقة ←

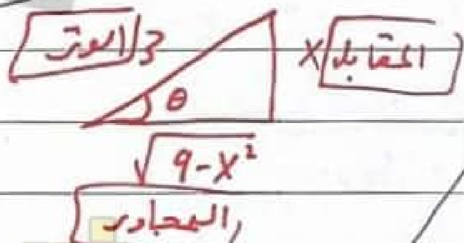
$\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$

$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{9}{\cancel{4}_{2}}\left(\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{\cancel{9}}{2}\left(\frac{x}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{\cancel{3}}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$$

$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{3}$



$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

* كيف طلعنا θ ؟ من الفرض

$x = 3\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{x}{3}$

خذ $\sin^{-1}$ للطرفين لحتى نفضل

θ لحالها في طرف

$\sin^{-1}\sin\theta = \sin^{-1}\frac{x}{3}$

بروحوا مع بعض

$\boxed{\theta = \sin^{-1}\frac{x}{3}}$

Ex $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}$, $x > \frac{2}{5}$

X مضروبة بثابت
⇐ ابدأ بالتعويض (فرض)
افرض $5X = \sqrt{25X^2}$

let $u = 5x$

$du = 5dx \rightarrow dx = \frac{du}{5}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-4}}$

let $u = 2\sec\theta$

لانه الرمز يلي بنحل عليه هلأ هو u مو X

نفس خطوات المثال السابقه

$* \; u^2 = 4\sec^2\theta$

$* \; du = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$* \; \sqrt{u^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta-4}$

$= \sqrt{4(\sec^2\theta-1)}$

$= \sqrt{4\tan^2\theta} = 2\tan\theta$

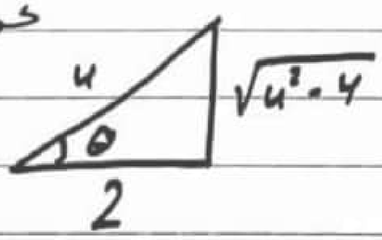
$= \frac{1}{5}\int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$

$\theta \rightarrow u$ حول θ إلى u

من الفرض $u = 2\sec\theta$

$\sec\theta = \frac{u}{2} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$



$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u}{2}+\frac{\sqrt{u^2-4}}{2}\right| + c$ نعوض مكان u قيمتها

$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5}{2}x+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + c$

Ex $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

x^2-4x+5

$\Delta = b^2-4ac$

$= 16-4(1)(5) = -5$

المميز سالب ⇐ لا تحلل ⇐ الحل مربع (نضيف ونطرح $\frac{1}{2}$ معامل X تربيع)

$x^2-4x+(2)^2-(2)^2+5 = (x-2)^2+1$

$\displaystyle = \int \frac{dx}{\sqrt{\underbrace{(x-2)}^2+1}}$ let $u = x-2$

$du = dx$

لعين X ⇐ فرضنا (تعويض)

$\displaystyle = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$ let $u = \tan\theta$

$* \; u^2 = \tan^2\theta$

$* \; du = \sec^2\theta \, d\theta$

$* \; \sqrt{u^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta+1}$

$= \sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$

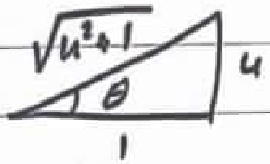
tan ⇐ جمع

$\displaystyle = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \int \sec\theta \, d\theta$

$= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$

$\theta \to u$

$\boxed{\text{من الفرض}}$ $u = \tan\theta \to \tan\theta = \frac{u}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



$= \ln|\sqrt{u^2+1} + u| + c$

$= \ln|\sqrt{(x-2)^2+1} + (x-2)| + c$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

تمرين

① $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ ② $\int \sqrt{1-9x^2}\, dx$

③ $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$, $x>1$ ④ $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\, dx$

⑤ $\int x \sin^{-1} x\, dx$

الحل

① $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

جمع اذاً tan

let $x = \tan\theta$

* $x^2 = \tan^2\theta$
* $dx = \sec^2\theta\, d\theta$
* $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\tan^2\theta+1} = \sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$

$= \int \frac{\cancel{\sec^2\theta}}{\tan^2\theta\, \cancel{\sec\theta}}\, d\theta$

$= \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\, d\theta = \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \frac{\cos^{\cancel{2}}\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$

نحول الأشكال (لحتى نختصر)

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$ جزء من مشتقة المقام في البسط اذاً نعوض

let $w = \sin\theta$

$dw = \cos\theta\, d\theta$

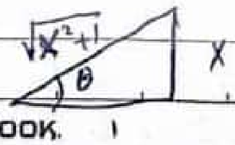
$= \int \frac{dw}{w^2}$

$= \int w^{-2}\, dw = \frac{w^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{w} + C = \frac{-1}{\sin\theta} + C$

$= -\csc\theta + C$

$\theta \rightarrow x$

$x = \tan\theta \rightarrow \tan\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



$= \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + C$

FRANCO NOTEBOOK.

② $\int \sqrt{1-9x^2}\, dx$ Let $u = 3x$

$du = 3dx \rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{1-u^2}\, du$

Let $u = \sin\theta$

* $u^2 = \sin^2\theta$

* $du = \cos\theta\, d\theta$

* $\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$

$= \frac{1}{3}\int \cos\theta \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{du} = \frac{1}{3}\int \cos^2\theta\, d\theta$ $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{6}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$

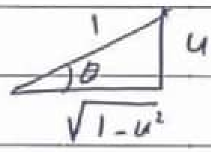
نكامل بالنسبة لثيتا

$= \frac{1}{6}\theta + \frac{1}{12}\sin 2\theta + C$ $\theta \rightarrow u$

متطابقة

$\sin\theta = \frac{u}{1} =$ المقابل / الوتر

$= \frac{1}{6}\sin^{-1}u + \frac{1}{12}(2\sin\theta\cos\theta) + C$ $\theta = \sin^{-1}u$



$= \frac{1}{6}\sin^{-1}u + \frac{1}{6}u\sqrt{1-u^2} + C$

$= \frac{1}{6}\sin^{-1}(3x) + \frac{1}{6}\left(3x\sqrt{1-9x^2}\right) + C$

$= \frac{1}{6}\sin^{-1}(3x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-9x^2} + C$

$(a)^{\frac{c}{d}}$ c → أس ، d → جذر

③ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad x>1$

$$= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$$

let $x = \sec\theta$

* $x^2 = \sec^2\theta$
* $dx = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$
* $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\tan^2\theta} = \tan\theta$

$$= \int \frac{\sec\theta \tan\theta \, d\theta}{(\tan\theta)^{3}}$$

مانسى التكعيب ⟶ $(\tan\theta)^{3}$

$$= \int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} d\theta = \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} d\theta = \int \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$$

let $w = \sin\theta$

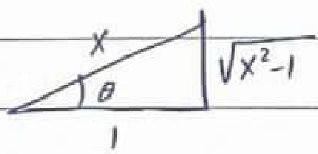
$dw = \cos\theta \, d\theta$

$$= \int \frac{dw}{w^2} = \int w^{-2} dw$$

$$= \frac{-1}{w} + C = \frac{-1}{\sin\theta} + C = -\csc\theta + C$$

$\theta \to x$

$x = \sec\theta \to \sec\theta = \frac{x}{1} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$



$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$$

(4) $\int e^x \sqrt{1-e^{2x}}\, dx$ let $u = e^x$ نبدأ بالعزل (لأنه عنا e^x)

$du = e^x dx \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$= \int \cancel{e^x} \sqrt{1-u^2}\, \frac{du}{\cancel{e^x}}$

وليس X

$= \int \sqrt{1-u^2}\, du$ let $u = \sin\theta$

* $u^2 = \sin^2\theta$

$= \int \underbrace{\cos^2\theta}_{\text{متطابقة}}\, d\theta$

* $du = \cos\theta\, d\theta$

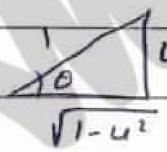
* $\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta) + C$

$\theta \rightarrow u$

$\sin\theta = \frac{u}{1}$



$\boxed{\theta = \sin^{-1} u}$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + \frac{1}{2} u\sqrt{1-u^2} + C$

$= \frac{1}{2}\sin^{-1} e^x + \frac{1}{2} e^x \sqrt{1-e^{2x}} + C$

(5) $\int x \sin^{-1} x\, dx$ حاكينا $\sin^{-1}x$ مضروبة بـ x ← أجزاء

$u = \sin^{-1} x$ $dv = x\, dx$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\xleftarrow{\int -}$ $v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ I نسمي التكامل I وحله

$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ let $x = \sin\theta$

* $x^2 = \sin^2\theta$

$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos\theta}} \cancel{\cos\theta}\, d\theta$

* $dx = \cos\theta\, d\theta$

* $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta$

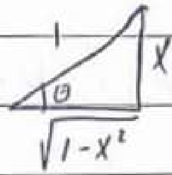
$= \int \sin^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + C = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$\theta \to x$

$\sin\theta = \frac{x}{1}$



$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}}_{\text{جواب } I}$$

$$\int x\sin^{-1}x\, dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$\boxed{Ex}$ $\int \sqrt{x^2+x}\, dx$

إكمال مربع

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}\, dx$$

let $w = x + \frac{1}{2}$

$dw = dx$

$$= \int \sqrt{w^2 - \frac{1}{4}}\, dw$$

let $w = \frac{1}{2}\sec\theta$

* $w^2 = \frac{1}{4}\sec^2\theta$
* $dw = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$
* $\sqrt{w^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2\theta - 1)} = \frac{1}{2}\tan\theta$

$$= \int \frac{1}{2}\tan\theta \cdot \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{1}{4}\sec\theta\tan^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{4}\sec\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \sec^3\theta - \sec\theta\, d\theta$$

بتكملوا الحل عقواعد تكامل sec وبعدين بتحولوا θ إلى w عن طريق العزبي ثم w إلى x

$\boxed{Ex}$ $\int \frac{x+5}{x^2+11}\, dx = \int \frac{x}{x^2+11}\, dx + \int \frac{5}{x^2+11 \to (\sqrt{11})^2}\, dx$

وزعنا البسط على المقام

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+11| + \frac{5}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{11}}\right) + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

Integration of Rational function by "Partial Fraction"

(تكامل بسط عمقام باستخدام الكسور الجزئية)

$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{\text{Polynomial}}{\text{polynomial}}$ بسط ع مقام (كثير حدود على كثير حدود)

شروط هذا النوع من التكامل :-

① degree $(P(x)) <$ degree $(q(x))$

① درجة البسط أقل من درجة المقام

② factor $q(x)$ into irreducible polynomial

خطي linear $(ax+b)^r$

$(ax^2+bx+c)^r$, $b^2-4ac<0$

اقتران تربيعي مميزه سالب

٢ المقام يحلل إلى اقترانات أولية (أولية يعني لا تحلل)

خطي على صورة $(ax+b)^r$

تربيعي مميزه سالب $(ax^2+bx+c)^r$

الاقتران التربيعي يلي مميزه سالب ⇐ لا يحلل

$\Delta = b^2-4ac<0$

المميز

* ممكن يكونوا موجودين الإثنين

The partial fraction decomposition of :

طريقة تفكيك المقام في حال توافق الشروط:

① $\frac{P(x)}{(2x-1)^1(x+1)^1} = \frac{A}{(2x-1)^1} + \frac{B}{(x+1)^1}$ ⇐ الأس واحد

نعطي الجزء الأول الرمز A والجزء الثاني الرمز B

(لازم تكون الأجزاء ما بتحلل)

الخطي بياخذ رمز فقط (مثل A)

② $\frac{P(x)}{(2x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{(2x-1)^1} + \frac{B}{(2x-1)^2} + \frac{C}{(2x-1)^3} + \frac{D}{(x+1)}$

عنا ٣ $(2x-1)$ نوزعهم على A و B و C ⇐ ولكن

نزيد أس في كل مرة

③ $\frac{P(x)}{(2x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{(2x^2+1)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$

التربيعي بياخذ معادلة خطية ما بتحلل وبتكون من رموز $(Ax+B)$

عنا $(x-1)$ تنتين الأولى أعطيناها C والثانية D (ولكن $(x-1)^2$) (لكل مرة بنزيد أس)

$2x^2+1 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac$

$= 0-4(2)(1) = -8 < 0$

المميز سالب اذاً لا تحلل

⇐ تأخذ في البسط اقتران خطي

دائماً نعطي البسط أقل بدرجة من المقام ما يكون

(4) $\dfrac{X+1}{X^2(X-1)} = \dfrac{A}{X} + \dfrac{B}{(X)^2} + \dfrac{D}{(X-1)}$

X^2 هي عبارة عن خطي مرفوع للتربيع $(X)^2$
لذلك نوزع على جزأيه

$\dfrac{X+4}{(X^2+X-2)^2(X-1)} = \dfrac{X+4}{((X-1)(X+2))^2(X-1)}$

يحلل

نوزع التربيع

$= \dfrac{X+4}{(X-1)^2(X+2)^2(X-1)} = \dfrac{X+4}{(X-1)^3(X+2)^2}$

$= \dfrac{A}{(X-1)} + \dfrac{B}{(X-1)^2} + \dfrac{C}{(X-1)^3} + \dfrac{D}{(X+2)} + \dfrac{E}{(X+2)^2}$

اذاً :-

نحلل المقام إلى اقترانات أولية لا تحلل ، ثم نعطيها

إلى بسط مناسب ← المقام خطي نعطيه رمز مثل A

← المقام تربيعي لا يحلل نعطيه

معادلة خطية على صورة $AX+B$

Ex $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}\,dx$

١) نتحقق من الشروط :* درجة البسط = 2 > درجة المقام = 3
* المقام يحلل
⇐ تحققت الشروط

٢) نحلل المقام

$$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x} = \frac{x^2+4}{x(3x^2+4x-4)}$$

$$= \frac{x^2+4}{x(3x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3x-2} + \frac{C}{x+2}$$

نأخذ ما داخل التكامل ونبدأ بتحليل المقام (أخذنا X عامل مشترك ثم حللنا الباقي) وبعد ذلك نوزع المقام على الرموز المناسبة (ملاحظة إذا رموز فقط مثل A وB وC)

٣) نجد قيم A وB وC ⇐

$$\frac{x^2+4}{x(3x-2)(x+2)} = \frac{A\,(3x-2)(x+2)}{x\,(3x-2)(x+2)} + \frac{B\,(x)(x+2)}{3x-2\,(x)(x+2)} + \frac{C\,(x)(3x-2)}{x+2\,(x)(3x-2)}$$

نوحد المقامات ⇐ نضرب البسط والمقام بالجزء المفقود
من المقام الأصلي $x(3x-2)(x+2)$ ⇐
الآن أصبحت المقامات موحدة
نأخذ البسط الأصلي x^2+4 ونساويه
بالبسط الآخر ⇐

$$x^2+4 = A(3x-2)(x+2) + B(x)(x+2) + C(x)(3x-2)$$

من هنا نجد قيم A وB وC ⇐ عن طريق أخذ قيم لـ X وتعويضها في المعادلة ⇐ أسهل طريقة هي أخذ أصفار المقام (إذا احتجنا قيم زيادة باخذ أرقام من عندي)

أصفار المقام هي ⇐ $0, -2, \frac{2}{3}$ عوّضهم بالمعادلة (كل واحد لحال)

let $X=0 \Rightarrow 4 = -4A \Rightarrow \boxed{A=-1}$

let $X=-2 \Rightarrow 8 = -2C(-8) \Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}}$

let $X=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9}+4 = \frac{2}{3}B\left(\frac{2}{3}+2\right)$

$$\frac{\cancel{40}^{20}}{\cancel{9}} = \cancel{\frac{2}{3}}B\left(\frac{8}{\cancel{3}}\right) \Rightarrow \boxed{B=\frac{5}{2}}$$

٤) وزع التكامل وعوض قيم A و B و C

$$\int \frac{X^2+4}{X(3X-2)(X+2)}\,dx = \int \frac{-1}{X}\,dx + \int \frac{\frac{5}{2}}{3X-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{X+2}\,dx$$

٥) كامل كل جزء لحال

$$= -\ln|X| + \frac{5}{6}\ln|3X-2| + \frac{1}{2}\ln|X+2| + c$$

توضيح

$$\int \frac{\frac{5}{2}}{3X-2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{3X-2}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\ln|3X-1| = \frac{5}{6}\ln|3X-1|$$

Ex $\int \frac{x+2}{x^3+x}\,dx$

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

مميزه سالب لا يحلل

تربيعي اذاً يأخذ في البسط خطي

$$x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

أخذت البسط $x+2$ وساويته بكل جزء مضروب بمقام الجزء الثاني

let $x=0 \rightarrow \boxed{2=A}$

أصفار المقام ⇐ 0 فقط (وانا عندي) ٣ مجاهيل لذلك سنأخذ أي رقم ثانيه لإيجاد B و C)

let $x=1 \rightarrow 3 = 2A + B + C$

عوضنا $\boxed{2=A}$ $\quad 3 = 4 + B + C$

$\boxed{B+C=-1}$ --- (1)

let $x=-1 \rightarrow 1 = 2A + B - C$

$1 = 4 + B - C$

$\boxed{B-C=-3}$ --- (2)

اجمع (1)+(2) ←

$2B = -4$

$\boxed{B=-2} \xrightarrow{\text{عوضنا ب (1)}} -2 + C = -1 \rightarrow \boxed{C=1}$

$$\int \frac{x+2}{x^3+x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+1}\,dx$$

المقام مشتقه ليست في البسط اذاً أفصل (أوزع البسط على المقام)

$$= \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x^2+1| + \tan^{-1}x + C$$

Ex | $\int \frac{1}{X^3 - X^2} dx$ (درجة البسط = 0 < درجة المقام = 3 و المقام يحلل) الشروط ←

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$1 = Ax(x-1) + B(x-1) + C(x^2)$$ هي عملية توحيد

مقامات يعني يلي مقامه x^2 مابرجع بضربه لكماله x (بضربه باللي ناقصه ليوصل للمقام الأصلي)

let $x = 0 \rightarrow \boxed{B = -1}$

let $x = 1 \rightarrow 1 = C \rightarrow \boxed{C = 1}$

let $x = 2 \rightarrow 1 = 2A - 1 + 4$ خذ لحالها قيمة وعوض C و B

$2A = -2 \rightarrow \boxed{A = -1}$

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$$

$= -\ln|x| - \int x^{-2} dx + \ln|x-1|$ لرفع الأس وتكامله $= -x^{-1}$

$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C$

Ex | $\int \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - x} dx$ الشروط ←

درجة البسط = 3 > درجة المقام = 2

لم تتحقق ⇐

x درجة البسط > درجة المقام ⇐ قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2 - x & 2x^3 - 2x^2 + 1 \\ & -\ 2x^3 - 2x^2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

الناتج ← 2x ، ضرب

أكبر أس مع معامله / أكبر أس مع معامله $\left(\frac{2x^3}{x^2} = 2x\right)$ الناتج

الباقي ← 1

$$\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^2-x}\,dx \qquad I$$

تكامل الناتج + تكامل الباقي / المقسوم عليه

I تكامل عن طريق الأجزاء :

$$I = \int \frac{1}{x^2-x}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$\longrightarrow 1 = A(x-1) + B(x)$$

let $x=0 \longrightarrow \boxed{A=-1}$

let $x=1 \longrightarrow \boxed{1=B}$

$$I = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \ln|x-1|$$

$$\to \int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int 2x - \ln|x| + \ln|x-1|$$

$$= x^2 - \ln|x| + \ln|x-1| + c$$

Ex] $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$ let $u=e^x$

$du = e^x\,dx$

$dx = \frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{du}{u^2+3u+2}$

$$\frac{1}{u^2+3u+2} = \frac{1}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$$

$1 = A(u+1) + B(u+2)$

let $u=-1 \rightarrow \boxed{B=1}$

let $u=-2 \rightarrow \boxed{A=-1}$

$$\int \frac{1}{u^2+3u+2}\,dx = \int \frac{-1}{u+2}\,du + \int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= -\ln|u+2| + \ln|u+1| + c$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = -\ln|e^x+2| + \ln|e^x+1| + C$$

تدريب

① $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}\,dx$

② $\int \frac{5+2\ln x}{x(1+\ln x)^2}\,dx$

③ $\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$

الحل

① $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6}\, dx$

Let $u = \sin x$

$du = \cos x\, dx$

فرضنا sin لأن مشتقتها في البسط

$= \int \frac{du}{u^2 + u - 6}$

$$\frac{1}{u^2+u-6} = \frac{1}{(u+3)(u-2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-2}$$

$$1 = A(u-2) + B(u+3)$$

let $u = 2 \rightarrow \boxed{B = \frac{1}{5}}$

let $u = -3 \rightarrow \boxed{A = \frac{-1}{5}}$

$$\int \frac{1}{u^2+u-6}\, du = \int \frac{\frac{-1}{5}}{u+3}\, du + \int \frac{\frac{1}{5}}{u-2}\, du$$

$$= \frac{-1}{5} \ln|u+3| + \frac{1}{5} \ln|u-2| + c$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6}\, dx = \frac{-1}{5} \ln|\sin x + 3| + \frac{1}{5} \ln|\sin x - 2| + c$$

② $\int \frac{5+2\ln x}{x(1+\ln x)^2}\,dx$ let $u=\ln x$

$du=\frac{dx}{x}$

$= \int \frac{5+2u}{(1+u)^2}\,du$

$\frac{5+2u}{(1+u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2}$

$5+2u = A(1+u)^2 + B$ ما ضربنا B بشي لأنه مقامها نفس المقام الأصلي

let $u=-1 \rightarrow \boxed{B=3}$

let $u=0 \rightarrow 5=A+3 \rightarrow \boxed{A=2}$ خذ رقم آخر

$\int \frac{5+2u}{(1+u)^2}\,du = \int \frac{2}{1+u}\,du + \int \frac{3}{(1+u)^2}\,du$

$= 2\ln|1+u| + \int 3(1+u)^{-2}\,du$

$= 2\ln|1+u| - \frac{3}{1+u} + C$

$\int \frac{5+2\ln x}{x(1+\ln x)^2}\,dx = 2\ln|1+\ln x| - \frac{3}{1+\ln x} + C$

مثال

$\int \frac{2}{(1+x)^2}\,dx = \int 2(1+x)^{-2}\,dx$

$= \frac{2(1+x)^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{1+x} + C$

③ $\int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$ درجة البسط < درجة المقام

ولكن المقام لا يحلل ← ليست أجزاء

$$\frac{2}{x^2+2x+2} = \frac{2}{\underbrace{x^2+2x+1-1+2}_{\text{اكمال مربع}}} = \frac{2}{(x+1)^2+1}$$

$$\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx \qquad u = x+1, \quad du = dx$$

$$= 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= 2\tan^{-1}u + C = 2\tan^{-1}(x+1) + C$$

Ex $\int \frac{5}{x^4+3x^2+2}\,dx$

$$\frac{5}{x^4+3x^2+2} = \frac{5}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

$5 = (ax+b)(x^2+1) + (x^2+2)(cx+d)$ الاحتمالى أهم شي

let $x=0 \rightarrow \boxed{5 = b + 2d}$ — ①

let $x=1 \rightarrow \boxed{5 = 2a + 2b + 3c + 3d}$ — ②

let $x=-1 \rightarrow \boxed{5 = -2a + 2b - 3c + 3d}$ — ③

let $x=2 \rightarrow \boxed{5 = 10a + 5b + 12c + 6d}$ — ④

$10 = 4b + 6d \leftarrow$ ②+③ — ⑤

$- \quad 15 = 3b + 6d \leftarrow$ ١ مضروبة بـ 3

رقم معادلة

$\boxed{-5 = b}$

$10 = -20 + 6d$ عوضنا بـ ⑤

$\boxed{d = 5}$

② $\rightarrow$ $5 = 2a - 10 + 3c + 15 \rightarrow \boxed{0 = 2a + 3c}$

④ $\rightarrow$ $5 = 10a - 25 + 12c + 30 \rightarrow \boxed{0 = 10a + 12c}$

$\boxed{a = 0 \text{ and } c = 0}$

$$\int \frac{5}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{-5}{x^2+2}\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 5\tan^{-1}(x) + C$$

أهم المتطابقات المثلثية

$$\boxed{\sin^2 X + \cos^2 X = 1}$$

$$\sin 2X = 2\sin X \cos X$$

$$\cos 2X = \cos^2 X - \sin^2 X$$
$$= 1 - 2\sin^2 X$$
$$= 2\cos^2 X - 1$$

$$\sin^2 X = \frac{1}{2}(1 - \cos 2X)$$

$$\cos^2 X = \frac{1}{2}(1 + \cos 2X)$$

إذا تكامل على صورة $\sin^2 X$ أو $\cos^2 X$ يجب تحويله إلى

$$\sec^2 X = 1 + \tan^2 X$$
$$\csc^2 X = 1 + \cot^2 X$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Improper Integrals

النوع الأول

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

أمثلة على النوع الثاني :

$\int_{0}^{2} \frac{1}{x} dx$ discont. at $x = 0$

$\int_{-2}^{3} \frac{1}{x-1} dx$ discont. at $x = 1 \in [-2,3]$

توضيح Improper Integral هو تكامل محدود لا نستطيع إيجاد قيمة التكامل مباشرة لأنه هناك مشكلة في رقم ضمن فترة (حدود) التكامل ، أنواعه :

النوع الأول :- أحد أطرافه أو كلاهما ∞ أو $-\infty$
(المشكلة هي لا نستطيع إيجاد قيمة التكامل اذا عوضنا بـ ∞)

النوع الثاني :- ① أحد الأطراف أو كلاهما ليس ضمن مجال الاقتران الذي داخل التكامل ← يعني الاقتران غير متصل عند أحد أو كلا أطراف الفترة

② هناك رقم داخل فترة التكامل $(c \in [a,b])$ خارج مجال الاقتران الذي داخل التكامل ← يعني الاقتران غير متصل عند c

(1) (الحالة الأولى) اذا كان الاقتران $f(x)$ متصل على الفترة $[a,\infty)$

$\boxed{\infty}$ المشكلة

فإن :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{K\to\infty} \int_a^{K} f(x)\,dx$$

← نأخذ النهاية عندما K يقترب من ∞ لتكامل الاقتران من a إلى K (حيث K رمز نستخدمه لإيجاد قيمة التكامل بدلالة K ثم نجد النهاية للقيمة الناتجة)

← اذا كانت النهاية موجودة وتساوي (L) فإن التكامل المطلوب يسمى Converge ويساوي L

← اذا كانت النهاية غير موجودة (Does not exist) فإن التكامل المطلوب يسمى diverge

(الحالة الثانية) اذا كان الاقتران $f(x)$ متصل على الفترة $(-\infty, b]$ فإن

$$\int_{\boxed{-\infty}}^{b} f(x)\,dx = \lim_{K\to-\infty} \int_K^{b} f(x)\,dx$$

المشكلة

→ exist $= L$, Then $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = L$ (converge)

→ D.N.E, Then $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ (diverge)

نفس الحالة الأولى ولكن نضع الرمز K للمكان الذي يمثل المشكلة ونأخذ النهاية عنده

(الحالة الثالثة) اذا كان الاقتران متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$ فإن

$$\int_{\underline{-\infty}}^{\underline{\infty}} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx}_{(2)}$$

مشكلة (∞) ، مشكلة ($-\infty$)

في الحالة الثالثة لدينا مشكلتين ← نتخلص منهم عن طريق فصل التكامل عند رقم (c، حيث f(x) متصل عند c)

ثم نحل ① و ② نفس حل (الحالة الاولى والثانية)

If (1) and (2) conv. Then $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ is converge

If (1) or (2) div Then $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ is div.

اذا كان ناتج ① و ② ← conv فإن التكامل المطلوب conv ويساوي حاصل جمع ① + ②

اذا كان ناتج ① أو ② ← div فإن التكامل المطلوب div

conv → converge

div → diverge

② الحالة الاولى اذا كان الاقتران متصل على الفترة [a, b) فإن

غير متصل عند b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to b^-} \int_a^k f(x)\,dx$$

مشكلة (b)

→ exist = L, Then $\int_a^b f(x)\,dx = L$ (Converge "to" L")

→ D.N.E, Then $\int_a^b f(x)\,dx$ (diverge)

b من اليسار

الحالة الثانية اذا كان الاقتران متصل على الفترة (a, b] فإن

غير متصل عند a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f(x)\,dx$$

مشكلة (a)

→ exist = L, Then $\int_a^b f(x)\,dx = L$ (conv.)

→ D.N.E, Then $\int_a^b f(x)\,dx$ (div)

a من اليمين

الحالة الثالثة: اذا كان الاقتران $f(x)$ متصل على الفترة $[a,b]-\{w\}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{w} f(x)\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{w}^b f(x)\,dx}_{②}$$

مشكلة (w) — فإن

بنحل ① و ② عطريقة الحالة الأولى والثانية

If ① and ② conv. Then $\int_a^b f(x)\,dx$ is conv.

ويساوي قيمة المجموع

If ① or ② div. Then $\int_a^b f(x)\,dx$ is div.

متصل على الفترة $[a,b]$ ماعدا w ← بفصل عنده

نمط السؤال ← اما بحكيلي determine يعني حدد اذا كان conv. or div.

أو Evaluate يعني جد قيمة التكامل

conv ← اله قيمة

div ← ما اله قيمة

Ex Determine whether the integral conv. or div. "or Evaluate"

مشكلة (∞)

① $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_2^{k} \frac{1}{x^3}\,dx}_{I}$

سمي التكامل I وحله

$$I = \int_2^k x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}\Big]_2^k = \frac{-1}{2x^2}\Big]_2^k = \underbrace{\frac{-1}{2k^2} + \frac{1}{8}}_{\text{قيمة } I}$$

← خذ النهاية الها

$0 = \frac{1}{\infty}$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{-1}{2k^2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$ ← قيمة التكامل الأصلي

Then $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ converge to $\frac{1}{8}$

② $\int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_0^{k} x e^{-x}\, dx}_{I}$

$I = \int_0^{k} x e^{-x}\, dx$ أجزاء

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$I = -x e^{-x}\Big|_0^k + \int_0^k e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x}\Big]_0^k$

$I = -\dfrac{k}{e^k} - \dfrac{1}{e^k} - (0 - 1)$

$\rightarrow I = \underbrace{\dfrac{-k}{e^k} - \dfrac{1}{e^k} + 1}_{\text{قيمة } I}$

$\lim_{k\to\infty}\left(\dfrac{-k}{e^k} - \dfrac{1}{e^k} + 1\right) = \lim_{k\to\infty}\dfrac{-k}{e^k} - \lim_{k\to\infty}\dfrac{1}{e^k} + \lim_{k\to\infty} 1$ لوبيتال $\quad \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

$= \lim_{k\to\infty}\dfrac{-1}{e^k} - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$

$\frac{-1}{e^{\infty}} = 0$

Then $\int_0^{\infty} x e^{-x}\, dx = 1 \longrightarrow$ Conv. to 1

خذ أي رقم

مشكلة

$$③\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{②}$$

مشكلة

$$① \rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to-\infty} \underbrace{\left(\int_{k}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)}_{I}$$

$$I = \int_{k}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_{k}^{0} = \underset{0}{\tan^{-1}0} - \tan^{-1}(k) = \underbrace{-\tan^{-1}(k)}_{I\ \text{نتيجة}}$$

$$① \rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(-\tan^{-1}(k)\right) = -\lim_{k\to\infty}\tan^{-1}(k) = -\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \left(\text{conv. to } \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x = \frac{-\pi}{2}$$

$$② \rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\int_{0}^{k} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)}_{II}$$

$$II = \int_{0}^{k} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_{0}^{k} = \tan^{-1}(k)$$

$$② \rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty}\tan^{-1}(k) = \frac{\pi}{2} \quad \left(\text{Conv. to } \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\rightarrow \text{Then } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Conv. to π

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

مو $\frac{\pi}{4}$ بس

④ $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{k\to-\infty} \underbrace{\int_{k}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx}_{I}$

$I = \int_{k}^{0} (x-2)^{-2}\,dx = \frac{-1}{x-2}\Big]_{k}^{0} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{k-2}}_{I \text{ قيمة}}$

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k-2}\right) = \frac{1}{2}$

Then $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ conv. to $\frac{1}{2}$

⑤ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx}_{①} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$

$① \to \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{k\to-\infty} \underbrace{\int_{k}^{0} e^{-x}\,dx}_{I}$

$I = \int_{k}^{0} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_{k}^{0} = -1 + \frac{1}{e^{k}}$

$\lim_{k\to-\infty} -1 + \frac{1}{e^{k}} = \infty$

Then $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$ is div

(6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{k\to 1^-} \underbrace{\int_0^k \frac{dx}{\sqrt{1-x}}}_{I}$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ غير متصل عند 1 وهو أحد أطراف الفترة ← نأخذ النهاية عنده (ولكن من اليسار)

$I = \int_0^k \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$

$= \int_0^k (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx = -2\sqrt{1-x}\Big]_0^k = -2\sqrt{1-k} + 2$

$\int (\text{خطي})^{\text{رقم}}\, dx = \frac{(\text{خطي})^{\text{رقم}+1}}{(\text{رقم}+1)\ \text{معامل}\ x}$

$\lim_{k\to 1^-} (-2\sqrt{1-k} + 2) = 2$

Then $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$ (conv. to 2)

(7) $\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\, dx}_{①} + \underbrace{\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\, dx}_{②}$

غير متصل عند 2

① $\rightarrow \int_1^2 \frac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}\, dx = \lim_{k\to 2^-} \underbrace{\int_1^k (x-2)^{-\frac{2}{3}}\, dx}_{I}$

$I = \int_1^k (x-2)^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3\sqrt[3]{x-2}\Big]_1^k = 3\sqrt[3]{k-2} + 3$

$\lim_{k\to 2^-} (3\sqrt[3]{k-2} + 3) = 3$ (conv. to 3)

② $\rightarrow \int_2^4 (x-2)^{-\frac{2}{3}}\, dx = \lim_{k\to 2^+} \underbrace{\int_k^4 (x-2)^{-\frac{2}{3}}\, dx}_{II}$

$II = \int_k^4 (x-2)^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3\sqrt[3]{x-2}\Big]_k^4 = 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{k-2}$

$\rightarrow \lim_{k\to 2^+} (3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{k-2}) = 3\sqrt[3]{2}$ (conv. to $3\sqrt[3]{2}$)

$\rightarrow \int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}$ (conv)

⑧ $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{②}$

① $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k\to 0^+} \underbrace{\int_{k}^{1} x^{-2}\,dx}_{I}$

$I = \int_{k}^{1} x^{-2}\,dx = \left.\frac{-1}{x}\right]_{k}^{1} = -1 + \frac{1}{k}$

$\lim_{k\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$

$\frac{1}{0} = \infty$

$\rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ div.

⑨ $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$ مجال $\ln x$ ← $(0,\infty)$ غير متصل عند 0

$= \lim_{k\to 0^+} \underbrace{\int_{k}^{1} \ln x\,dx}_{I}$

$I = \int_{k}^{1} \ln x\,dx$ أجزاء

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

$I = \left. x\ln x\right]_{k}^{1} - \int_{k}^{1} dx = \left. x\ln x - x\right]_{k}^{1} = -1 - (k\ln k - k)$

$= -1 - k\ln k + k$

$\lim_{k\to 0^+} (-1 - k\ln k + k) = -1$

$\rightarrow \int_{0}^{1} \ln x\,dx$ conv to -1

Ex) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

غير متصل عند 1

$$= \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx}_{①} + \underbrace{\int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx}_{②} + \underbrace{\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx}_{③}$$

حل بنفس الطريقة

⋮

Rules: قواعد

حفظ

① $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{if } p>1 \text{ Then conv. to } \frac{1}{p-1} \\ \text{if } p \le 1 \text{ Then div} \end{cases}$

اذا كان التكامل من 1 إلى ∞ والاقتران هو $\frac{1}{x^p}$ (شرط x^p في المقام)

← اذا كانت p اكبر من 1 ← conv وقيمته تساوي $\frac{1}{p-1}$

← اذا كانت p اقل او تساوي 1 ← div

Ex) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \rightarrow$ conv. to $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

Ex) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \rightarrow$ div $(p<1)$

حفظ ② $\int_{a}^{\infty} \frac{c}{x^{p}}\, dx = \begin{cases} \text{if } p > 1 \text{ Then conv to ??} \\ \text{if } p \leq 1 \text{ Then div} \end{cases}$

$\boxed{a \geq 1}$

اذا كان التكامل من a إلى ∞ (بشرط a أكبر أو تساوي 1) للاقتران $\frac{c}{x^{p}}$ (حيث c رقم) و x^{p} في المقام ← اذا كان p أكبر من 1 بكون conv (ما بنعرف القيمة بنحل مثل الحالات الاولى)

← اذا كان p أقل أو يساوي 1 بكون div

Ex] $\int_{3}^{\infty} 7x^{-3}\, dx = \int_{3}^{\infty} \frac{7}{x^{3}}\, dx \rightarrow \underline{\underline{\text{Conv}}}$

حفظ ③ $\int_{a}^{\infty} c e^{px}\, dx = \begin{cases} \text{if } p < 0 \text{ Then conv to ??} \\ \text{if } p \geq 0 \text{ Then div} \end{cases}$

اذا كان التكامل من a إلى ∞ للاقتران $c\,e^{px}$ (حيث c و p أرقام) و e^{px} في البسط ← اذا كان p أقل من صفر (يعني سالب) ← conv

← " " p أكبر أو يساوي صفر ← div

والقيمة مجهولة

Ex] $\int_{3}^{\infty} 7e^{-x}\, dx \qquad p = -1 < 0 \rightarrow \text{conv to ??}$

Ex] $\int_{3}^{\infty} \frac{1}{e^{-2x}}\, dx = \int_{3}^{\infty} e^{2x}\, dx \rightarrow \text{div}$

Sequences المتتاليات

Defn: A seq. is any function whose domain is the set of integer

المتتالية ← هي أي اقتران مجاله أعداد صحيحة

(يعني المجال لديكم أن يكون كسر)

The function $a_n = a(n) = \frac{1}{n}$, for $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

نعوض قيم n بالاقتران لإيجاد شكل المتتالية

$a_1 = a(1) = \frac{1}{1}$

$a_2 = a(2) = \frac{1}{2}$

$a_3 = a(3) = \frac{1}{3}$

كاقتران

$\Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

شكل الاقتران يكون إما a_n أو $a(n)$ حيث n محدودة في الاقتران (وهي المجال)

* We use set notation to denote a seq:

① $a_n = \boxed{}$, $n = L, L+1, L+2, \dots$

or

② $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

or

③ $\{a_n\}_{n=L}$

$\hookrightarrow (n = L, L+1, L+2, \dots)$

شكل المتتالية إما يكون اقتران $\boxed{a_n =}$ أو يتم التعويض فيها مباشرة وتكتب على صورة $\boxed{a_1, a_2, a_3 \dots}$ أو $\{a_n\}_{n=L}$ ← الأكثر شكل مستخدم

حيث n المجال و $n = L, L+1, L+2, \dots$ كل مرة بزيد رقم

Ex) $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ الشكل الأول

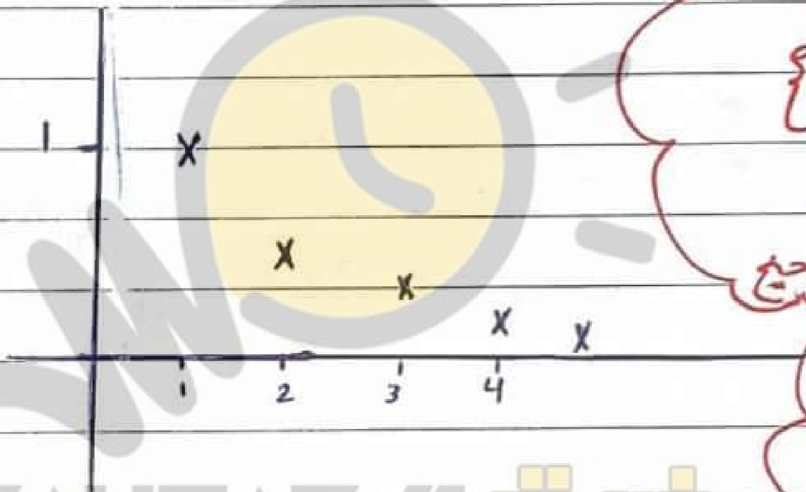
or $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ الشكل الثاني

or $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}$ $\boxed{\text{الشكل الثالث}}$

من هنا نبدأ

عوضنا أول 3 قيم

$n = 1 \rightarrow$
$(1, 1)$
$n = 2 \rightarrow$
$(2, \frac{1}{2})$
$n = 3 \rightarrow$
$(3, \frac{1}{3})$



seq : sequence

$\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ → مجال

من n_0 إلى ∞

رقم صحيح

∞ مو دايماً بنحطها (إذا حطيناها أو ما حطيناها واحد)

Defn we say that the seq $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$

1. Converge To "L" if $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (exist)
2. Diverge if $\lim_{n\to\infty} a_n$ D.N.E

المتتالية إلها حالتين إما conv أو div ⇐
نحدد ذلك عن طريق أخذ النهاية للاقتران

إذا النهاية موجودة وتساوي L ⇐ تكون (conv to L)

إذا النهاية غير موجودة وتساوي ∞ ⇐ (div)

Ex) Determine whether the seq. conv or div

① $\left\{ \frac{n^2+3}{5n-4} \right\}_{n=1}$ a_n

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{5n-4} = \infty$ D.N.E $\Rightarrow$ seq is div

أس البسط > أس المقام
النهاية = ∞ ←

② $\left\{ \frac{2n^2-1}{3n+7n^2} \right\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n+7n^2} = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow$ seq is conv to $\frac{2}{7}$

أس البسط = أس المقام
النهاية = معامل أكبر أس / معامل أكبر أس ←

③ $\{3\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \Rightarrow$ seq. is conv to 3

④ $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$\frac{1}{\infty} = 0$

لوبيتال ← $\Rightarrow$ Conv. to 0

⑤ $\{n^2 e^{-n}\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} n^2 e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{e^n}$ لوبيتال

لوبيتال مرة أخرى $= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{e^n} = 0$

$\frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$

$\Rightarrow$ Conv to 0

حفظ

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{d}{n}\right)^{an} = e^{da}}$$

لما النهاية تقترب من ∞ الاقتران $\left(1+\frac{d}{n}\right)^{an}$ حيث a و d أرقام ← الجواب (e أس (a ضرب d)

⑥ $\left\{\left(1-\frac{7}{n}\right)^{2n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)^{2n} = e^{-14} \Rightarrow \text{Conv to } e^{-14}$$

نقسم البسط والمقام على n ليتحول إلى الشكل ↑ فصلنا الأس

⑦ $\left\{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$= \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2} \Rightarrow \text{Conv to } e^{-2}$$

⑧ $\left\{\frac{\sin(n)}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

نستخدم لها seq. Thm

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

$$-1 \le \sin(n) \le 1$$

$$\frac{-1}{n^2} \le \frac{\sin(n)}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^2} = 0 \text{ by sequeezing Thm}$$

$\Rightarrow$ Conv to 0

FRANCO NOTEBOOK.

حفظ

$$\lim_{n\to\infty} (b)^n = \begin{cases} 0 , & -1 < b < 1 \\ 1 , & b = 1 \\ D.N.E & \text{for all value of } b \end{cases}$$

نهاية رقم أس n ← = 0 إذا كان الرقم بين -1 و 1
← = 1 // // // يساوي 1
← غير موجودة لدي قيمة أخرى (ضمنها -1)

⑨ $\{(2)^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\lim_{n\to\infty} (2)^n$ D.N.E ⇒ seq is div

⑩ $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

⇒ Conv. to 0

$\frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
حيث $1 = (1)^n$

حفظ

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$ since $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$

⑪ $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

⇒ Conv to 0

حفظ

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$ حيث a رقم

12 $\left\{ \frac{100^n}{n!} \right\}_{n=1}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$

$\rightarrow$ Conv to 0

If $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \xRightarrow{\text{Then}} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

اذا كانت نهاية مطلق اقتران تساوي صفر ⇐
فان نهاية الاقتران (من دون المطلق) تساوي صفراً ايضاً

sequence لما يكون المقطع مرة موجب مرة سالب ؛

$n = 1, 2, 3, \dots$

$(-1)^n \Rightarrow -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

$(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \dots$

$(-1)^{n+1} \Rightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5, \dots$

$(-1)^n \rightarrow$ نبدأ بسالب

$(-1)^{n+1} \rightarrow$ نبدأ بموجب

$\left\{ (-1)^n b_n \right\}_{n=1}^{\infty} = -b_1, b_2, -b_3, b_4, -b_5, \dots$

هذه المتالية إلها جزأين

$(-1)^n$ هو محدد الإشارة

b_n هو الاقتران

$$\{a_n\}_{n=1} = \{(-1)^n b_n\}_{n=1} \begin{cases} \text{if } \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ Conv to } 0 \\ \text{if } \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ is div} \end{cases}$$

عندما تحتوي المتتالية على جزء $(-1)^n$ أو $(-1)^{n+1}$ فهناك حالتان ← نأخذ النهاية للاقتران فقط (بدون $(-1)^n$)

اذا كانت النهاية تساوي صفر ← المتتالية كاملة بتكون Conv وتساوي صفر

* (شرط صفر b) *

اذا كانت النهاية لا تساوي صفر ← المتتالية كاملة بتكون div

Ex

① $\left\{\overbrace{(-1)^n \underbrace{\frac{n^2+1}{n^3+2}}_{b_n}}^{a_n}\right\}_{n=1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} = 0$$

شرط صفر

Then $\left\{(-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+2}\right\}_{n=1} \longrightarrow$ conv to 0

② $\underbrace{\left\{(-1)^n \frac{n^3+1}{2+3n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}}_{=\{a_n\}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{2+3n^3} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Then $\{a_n\}$ is div

* $\left\{\frac{n^3+1}{2+3n^3}\right\}_{n=1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{2+3n^3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Conv to $\frac{1}{3}$

→ لا تحتوي على $(-1)^n$ او $(-1)^{n+1}$

Ex) ① $\left\{ \dfrac{\cos(n) + 3n + e^{-n}}{\sin(n) + 5n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

نأخذ النهاية لـ e

$\frac{1}{\infty} = 0$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{3n + e^{-n}}{5n} = \dfrac{3}{5}$

لذلك

$\cos(\infty)$ or $\sin(\infty)$ $\rightarrow$ D.N.E

متذبذب

ولكن مداها $[-1,1]$

conv to $\boxed{\frac{3}{5}}$

② $\left\{ \dfrac{n\sin^2(n) + 2n^2}{5n + e^{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$

لوبيتال لوبيتال

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{5n + e^{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4n}{5 + e^{n}} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4}{e^{n}} = 0$

conv to 0

③ $\left\{ n^{\frac{1}{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim_{n\to\infty} e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$

حولناه للأس

باستخدام لوبيتال للأس فقط

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1} = 0$

$\therefore e^{0} = 1$

$\rightarrow$ Conv to 1

Monotone Sequences

Def$_n$ A seq $\{a_n\}_{n=1}$ is called :⇒

$\boxed{1}$ Increasing if

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \le a_6 \le \dots$$

تسمى المتتالية متزايدة إذا كان الحد الأول أقل أو يساوي
الحد الثاني أقل أو يساوي الحد الثالث ... وهكذا

Ex) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}, \dots$

inc. = increasing

تزداد

increasing ⇐

Ex) $1 = 1 < 2 = 2 < 3 = 3 < 4 = 4 \dots$

inc.

اذا تساووا جميعهم نستطيع اعتبارها inc.

$\boxed{2}$ Decreasing if

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge a_5 \ge a_6 \ge \dots$$

تسمى المتتالية متناقصة اذا كان الحد الأول أكبر أو يساوي
الحد الثاني أكبر أو يساوي الحد الثالث ... وهكذا

Ex) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \ldots$

dec: decreasing $\Rightarrow$ dec.

Defn A seq. is either inc. or dec. is called "monotone seq."

* monotone seq → increasing or decreasing

* $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}_{n=1} \Rightarrow -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$

$-1 < \frac{1}{2} > -\frac{1}{3} < \frac{1}{4} > -\frac{1}{5} < \ldots$

not monotone seq.

⇐ اذاً كل الأمثلة على .inc و dec تسمى monotone

لنعرف اذا كانت المتتالية inc أو dec كنا نعوض أول مجموعة حدود ع التهريج نستخدم ثلث اختبارات ولكل اختبار إله حالاته نستطيع من خلالهم أعرف اذا كانت المتتالية متزايدة أم متناقصة

Scanned by CamScanner

Testing let $\{a_n\}_{n=L}^{\infty}$ be a seq.

① $a_{n+1} - a_n \ ? \ 0$

→ ≥ 0 for all $n \geq L$, Then $\{\ \}$ inc
→ ≤ 0 for all $n \geq L$, Then $\{\ \}$ dec

الاختبار الأول ⇐ نعوض $(n+1)$ مكان كل n والناتج يكون a_{n+1}
ثم نطرح a_{n+1} من a_n ثم نعوض أول مجموعة حدود

← اذا كان الجواب أكبر أو يساوي صفر بتكون المتتالية inc
← اذا كان الجواب أقل أو يساوي صفر بتكون المتتالية dec

* يستخدم للاقترانات التي يسهل جمعها وطرحها

② $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ ? \ 1$

→ ≥ 1 for all $n \geq L$, Then $\{\ \}$ inc
→ ≤ 1 for all $n \geq L$, Then $\{\ \}$ dec

الاختبار الثاني ⇐ نجد a_{n+1} ونقسمها على a_n ثم نعوضها أول مجموعة حدود

← اذا كان الجواب أكبر أو يساوي واحد ← inc
← " " " أقل " " " ← dec

* يستخدم للضروب والاقترانات التي يسهل قسمتها

③ $f(x) = a_x$

$f'(x) \ ? \ 0$

→ ≥ 0 for all $x \geq L$, Then $\{\ \}$ inc
→ ≤ 0 for all $x \geq L$, Then $\{\ \}$ dec

الاختبار الثالث ← نأخذ a_n ونضع مكان كل n ← x ليصبح الاقتران بدلالة x ثم نشتقه ونعوض بأول مجموعة حدود ← اذا كان الجواب أكبر أو يساوي صفر ← inc

اذا كان الجواب أقل " " " ← dec

* يستخدم عند وجود e^x أو $\ln x$ أو الاقترانات المثلثية العكسية...

$\boxed{Ex}$ Classify each seq. → inc / dec / not inc, not dec

1) $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

solution① → تعويض مباشر $1-\dfrac{1}{1} < 1-\dfrac{1}{2} < 1-\dfrac{1}{3} < 1-\dfrac{1}{4} < \dots \Rightarrow$ inc

solu② → Test①:- $a_{n+1} - a_n \;?\; 0$ for all $n \geq 1$

$a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

$a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ (نعوض مكان كل n ← n+1)

توحيد مقامات وجمع

$a_{n+1} - a_n = \cancel{1} - \dfrac{1}{n+1} - \cancel{1} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{-n+n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

"$a_{n+1} - a_n$" $= \dfrac{1}{n(n+1)} \;?\; 0$ for all $n \geq 1$

الاختبار الأول نقارنه مع 0

لاحظ هنا نبدأ (المجال)

نعوض

$n=1 \rightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2} > 0$

$n=2 \rightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{6} > 0$ $\Rightarrow \boxed{inc}$

$n=3 \rightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{12} > 0$

> 0

> 0

> 0

(2) $\left\{\frac{10^n}{(2n)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ عنا مضروب ⟵ اختبار القسمة

Test: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{?}{<} 1$ for all $n \geq 1$

$$a_n = \frac{10^n}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{10^{n+1}}{(2n+2)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n}$

البسط × مقلوب المقام

$b^{a+c} = b^a \cdot b^c$

$$= \frac{10^n \cdot 10}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n}$$

$m! = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots!$

رقم مضروب = نفسه . (الرقم - 1) . (الرقم - 2) . (الرقم - 3) ... !

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

وقفنا عند $(2n)!$ لحتى اختصرها مع $(2n)!$

$$= \frac{10}{(2n+2)(2n+1)} \overset{?}{<} 1 \text{ for all } n \geq 1$$

$n=1 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{12} < 1$

$n=2 \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{30} < 1$

<1

البسط ثابت والمقام يزداد <1

⟵ رح يضل أقل من واحد <1

$\boxed{dec}$

③ $\{\tan^{-1} n\}_{n=1}$

Test $f(x) = \tan^{-1} x$

عوضنا أي قيمة في $f'(x)$ رح تكون موجبة
موجب على R

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$? 0 for all $x \geq 1$

$f'(x)$ + + + + +
1

$f'(x) > 0$ for all $x \geq 1$

$\rightarrow$ inc.

④ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n=1}$

Test $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$? 1 for all $n \geq 1$

$a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{\cancel{2^n} \cdot 2}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \dfrac{2}{n+1}$ for all $n \geq 1$

$n = 1 \rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{2} = 1$

$\boxed{\text{dec}}$

$n = 2 \rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{3} < 1$

$n = 3 \rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{4} < 1$

< 1

< 1

(5) $\{n e^{-3n}\}_{n=1}$

Test) $f(x) = x e^{-3x}$

$f'(x) = x(-3) e^{-3x} + e^{-3x}$

$= -3x e^{-3x} + e^{-3x} \; ? \; 0$ for all $x \geq 1$

$\underbrace{e^{-3x}}_{0 \neq} (-3x+1) = 0$

$-3x = -1$

$x = \frac{1}{3}$

نبحث في الاشارة

$f'(x)$ + + + | − − −

$\frac{1}{3}$ $\boxed{1}$

dec

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}}$$

Ex) let $\{a_n\}_{n=1}$ conv to L and $a_1 = \sqrt{2}$

, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ Find L? $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n}$

$L = \sqrt{2 + L}$

$L^2 = 2 + L$

$L^2 - L - 2 = 0$

$(L-2)(L+1) = 0$

$L = 2$, $L = -1$

accept reject

$a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = \sqrt{2 + a_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

$a_3 = \sqrt{2 + a_2} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$

$\vdots$

الجواب كله جذور ← مستحيل

يكون جواب الجذر سالب لذلك

$L = -1$ نرفضها ونقبل $\boxed{L = 2}$

FRANCO NOTEBOOK