Calculus 102

second

part_one

By Rahaf Al-Hami

فريق_التغيير

فريق_كهربجي

"بسم الله الرحمن الرحيم"

Infinite Series

في الموضوع السابق "sequence" كنا نجد اذا كانت المتتالية

- موجودة (Converge) ⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
- غير موجودة (diverge) ⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n = D.N.E$

الآن في infinite series سنتحدث عن اشارة المجموع (sum)

$$\sum_{K=L}^{n} a_n$$

نريد ايجاد حاصل جمع الأرقام من L إلى K الناتجة من التعويض في a_n

Defn An infinite series is an expression that can be written in the form

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Let $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

حولناها إلى sequence ⇐ $S_n = \sum_{K=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_K$

(is called the "n" partial sum)

مجموع جزئي

if $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ (seq) → Conv to L, Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ (Conv) → series
→ div, Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n \rightarrow \text{conv / div}$$

* السيريز = نهاية السيكوينس S_n

$\boxed{Ex}$ $5-5+5-5+5-5+5-5+\cdots$

$S_1 = 5$
$S_2 = 5-5 = 0$
$S_3 = 5-5+5 = 5$
$S_4 = 0$
$S_5 = 5$
⋮

sequence ⇒ $5, 0, 5, 0, 5, 0, \cdots$ (div)
so $5-5+5-5+5-5+\cdots$ (div)

لمعرفة اذا كان السيريز Conv أو div نستخدم عدة اختبارات (بعض الاختبارات تعطينا قيمة المجموع اذا كان Conv وبعضها لا).

يجب التمكّن من جميع الاختبارات وفهمها جيداً

نادر جداً أن يحدد بالامتحان طريقة الحل لذلك يجب معرفة متى نستخدم كل اختبار بالاضافة للسرعة بالحل.

"Telescoping sum" الاختبار الأول

* نستطيع من خلاله تحديد قيمة المجموع اذا كان Conv
* يشبه الكسور الجزئية
* طريقة الحل باستخدام هذا الاختبار :-
- نأخذ ما داخل sum (يعني a_n)
- نحلل المقام (كـ الكسور الجزئية) ونعطي كل جزء من المقام رمز (الجزء الأول بسطه A والثاني B وهكذا) ونجد A,B
- نكتبه على شكل S_n (sequence)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\square + \square + \square + \cdots)$$

- نعوض بأول مجموعة من القيم وآخر حدود ونختصر المتشابهات

سيتم التوضيح في الأمثلة

- نأخذ المتبقي من S_n ثم نأخذ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$
- قيمة النهاية تعطي قيمة المجموع ⟸ نتعامل مع seq

طريقة الحل طويلة معلش ^^

* يستخدم في حالات خاصة :
اذا كان السيريز بسط على مقام و المقام يحلل
وممكن أن يكون مقام السيريز محلل جاهز ولا يحتاج إلى تجزئة.

Ex Find the sum ?

1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

نلاحظ أن السيريز لها مقام
و المقام مُحلل اذاً
نلجأ إلى "Telescoping sum"

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k}\,{}^{(k+1)} + \frac{B}{k+1}\,{}^{(k)}$$

$$1 = A(k+1) + B(k)$$

نجد A و B تماماً كالكسور
الجزئية

$k=0 \rightarrow 1 = A(1) + B(0)$

$\boxed{A=1}$

$k=-1 \rightarrow 1 = A(0) + B(-1)$

$\boxed{B=-1}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

الآن عوض أول مجموعة وآخر
مجموعة من الحدود ثم اختصر
المتشابه

$$\Rightarrow S_n = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{k=1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{k=3} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)}_{k=n}$$

ما يجب معرفته هنا أن ما داخل السيريز (جميع الحدود
سوف تختصر حاول أن تأخذ قيم أكثر ستلاحظ أن القيم
جميعها تختصر ما عدا أول حد وآخر حد لا يوجد ما يختصرهم)

* ليس دائماً أول حد وآخر حد يعلي أو يبقى أكثر من حدين وطلع الأطراف ستبقى غالباً ولا تختصر

ليس دائماً!!

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \text{Then } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad (\text{Conv to } 1)$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2+2k}$

$$\frac{4}{k^2+2k} = \frac{4}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$$

$$\Rightarrow 4 = A(k+2) + B(k)$$

$$k=0 \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow \boxed{A=2}$$

$$k=-2 \Rightarrow 4 = -2B \Rightarrow \boxed{B=-2}$$

$$\frac{4}{k^2+2k} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+2}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \left(\frac{2}{2} - \cancel{\frac{2}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{5}}\right) + \cdots$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{2}{n-2} - \cancel{\frac{2}{n}}\right)}_{k=n-2} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{2}{n-1}} - \frac{2}{n+1}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+2}\right)}_{k=n}$$

لاحظ أخذنا ٣ حدود في النهاية عشان أطور $n-2$ إلى n

$$S_n = 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$S_n = 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = 3$$

Then $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2+2k} = 3$ (conv to 3)

$\boxed{3}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ لاحظ أن a_k لا يحتاج إلى تجزئة

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right) + \cdots +$$

$$\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Then $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1$ (conv to 1)

[4] $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)$

$$S_n=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)$$

$$S_n=\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n-2}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)$$

$$S_n=-1+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}-1+\frac{1}{n}=-1$$

Then $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}\right)=-1$ (conv to -1)

[5] $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4}{k^2+2k}$

$$\frac{4}{k^2+2k}=\frac{4}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2}$$

$4=A(k+2)+Bk$

$k=-2 \Rightarrow 4=-2B \Rightarrow \boxed{B=-2}$

$k=0 \Rightarrow 4=2A \Rightarrow \boxed{A=2}$

$$S_n=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k}-\frac{2}{k+2}\right)=\left(\underline{\frac{2}{2}}-\cancel{\frac{2}{4}}\right)+\left(\underline{\frac{2}{3}}-\frac{2}{5}\right)+$$

$$\left(\cancel{\frac{2}{4}}-\frac{2}{6}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{2}{n-2}}-\cancel{\frac{2}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{n-1}}-\underline{\frac{2}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{n}}-\underline{\frac{2}{n+2}}\right)$$

$$S_n = 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Then $\sum a_k = \frac{5}{3}$ (Conv to $\frac{5}{3}$)

$\boxed{6}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+7k+12}$

$$\frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{A}{k+3} + \frac{B}{k+4}$$

$$1 = A(k+4) + B(k+3)$$

$k=-3 \Longrightarrow \boxed{A=1}$

$k=-4 \Longrightarrow \boxed{B=-1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) = \left(\frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \cdots$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}}\right)}_{k=n-2} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n+2}} - \cancel{\frac{1}{n+3}}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n+3}} - \frac{1}{n+4}\right)}_{k=n}$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$$

Then $\sum a_k = \frac{1}{4}$ (Conv to $\frac{1}{4}$)

Geometric Series

* Form : $\sum_{k=b}^{\infty} a(r)^{k-b}$ متغير — اول رقم

يجب حفظ هذا الشكل والتدرب على الأمثلة لتمييزه عن باقي الاختبارات

$$\Rightarrow \sum_{k=b}^{\infty} a(r)^{k-b} = \sum_{k=0}^{\infty} a(r)^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a(r)^{k-1}$$

* لاحظ أن الرقم الذي نبدأ منه ، هو الرقم المطروح من k في الأس

* اذا كان السيريز geometric ⇐ نستطيع ايجاد قيمة المجموع اذا كان Conv .

* $\sum_{k=1}^{\infty} a(r)^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

1. If $|r| \geq 1$, Then $\sum_{k=b}^{\infty} a(r)^{k-b}$ is div

2. If $|r| < 1$, Then $\sum_{k=b}^{\infty} a(r)^{k-b} = \dfrac{a}{1-r}$

(Conv to $\frac{a}{1-r}$)

Ex) Determine whether the series conv or div (if the ser. conv., Find the sum)

1) $\sum_{K=2}^{\infty} 3\left(\frac{-3}{4}\right)^{K-2}$

G-ser: $a = 3$, $r = -\frac{3}{4}$

(K − الرقم الذي بدأنا منه) = r لأس

and $|r| = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ Conv to $\frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\left(\frac{-3}{4}\right)} = \frac{3}{\frac{7}{4}} = \frac{12}{7}$ ← قيمة المجموع

انتبه (r ليس مطلق)

$\Rightarrow \sum_{K=2}^{\infty} 3\left(\frac{-3}{4}\right)^{K-2}$ is Conv to $\frac{12}{7}$

2) $\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{K+2}$ بدأ من 1 والأس لا يساوي K-1

← نغير في شكل a_K ليصبح G-ser

$\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{K+2} = \sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

(الأس $(K-1)+3 = K+2$ (لم أغير a_K فقط غيرت شكلها لتصبح G-ser)

G-ser: $a = \frac{1}{27}$, $r = \frac{1}{3}$ and $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ Conv

$\Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{K+2} \Rightarrow$ Conv to $\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{18}$

$\boxed{3}$ $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{-k+1} 3^{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{5^{k-1}}$

نزلنا 5 على المقام
لانه معامل k = -1
(وا ضا ددنا اياه = 1)

$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} \cdot (3)^3}{5^{k-1}}$

كل جزء الأس اله يحتوي
على k ⟸ بدي أحوله إلى k-1
ع الرقم الذي بدي أضافه

$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \cdot 27$ لانه أصبح على صورة G-ser

G-ser $\rightarrow a = 27$

$\rightarrow r = \frac{3}{5}$ and $|r| = \left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow$ Conv

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 5^{-k+1} 3^{k+1}$ Conv to $\frac{27}{1-\frac{3}{5}} = \frac{135}{2}$

Harmonic series

* Form : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k}$ div

Ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \Rightarrow$ div.

Ex) $\sum_{k=1}^{\infty} 5k^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$

$\Rightarrow$ div

ملاحظات مهمة:-

1- أي series اذا كانت Conv وضربت بأي قيمة ← تبقى Conv وتتغير قيمتها
2- أي series اذا كانت div وضربت بأي قيمة ← تبقى div
3- أي series اذا كانت Conv وأخرجنا منها حدود ← تبقى conv.
4- أي series اذا كانت div وأخرجنا منها حدود ← تبقى div.

Notes:

$\boxed{1}$ If $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ Conv. and $\sum_{K=1}^{\infty} b_K$ Conv. Then

$$\sum_{K=1}^{\infty} (a_K \mp b_K) = \sum_{K=1}^{\infty} a_K \mp \sum_{K=1}^{\infty} b_K \text{ is Conv.}$$

اذاً حاصل جمع أو طرح two conv. ser. ← Conv.

$\boxed{2}$ If $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ Conv. and $\sum_{K=1}^{\infty} b_K$ div. Then

$$\sum_{K=1}^{\infty} (a_K \mp b_K) \text{ div}$$

حاصل جمع أو طرح conv ser. مع div ser ← div

$\boxed{3}$ If $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ div and $\sum_{K=1}^{\infty} b_K$ div. Then

$$\sum_{K=1}^{\infty} (a_K \mp b_K) \rightarrow \text{Conv or div}$$

حاصل جمع أو طرح two div. ser ← الناتج اما conv أو div (يجب فحصه)

Ex Find the sum $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\underbrace{5^{-k}2^{k+1}}_{a_k}-\underbrace{\frac{3^{k+1}}{7^k}}_{b_k}\right)=$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}5^{-k}2^{k+1}}_{1}-\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{7^k}}_{2}$$ الحل ← بالفصل

1. $\sum_{k=1}^{\infty}5^{-k}2^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{5^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}\cdot 2^2}{5^{k-1}\cdot 5}$

حولناه إلى الصورة العامة لـ G-ser

$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{4}{5}\Rightarrow$ G-ser $r=\frac{2}{5}$, $a=\frac{4}{5}$

$|r|=\left|\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}<1\Rightarrow$ Conv to $\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{4}{3}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{7^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k-1}\cdot 3^2}{7^{k-1}\cdot 7}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}\cdot\frac{9}{7}$

$\Rightarrow$ G-ser $r=\frac{3}{7}$, $a=\frac{9}{7}$

$|r|=\left|\frac{3}{7}\right|=\frac{3}{7}<1\Rightarrow$ conv to $\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{9}{7}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k-b_k)=\frac{4}{3}-\frac{9}{4}=\frac{16-27}{12}=\frac{-11}{12}$

(conv to $\frac{-11}{12}$)

Ex) Find the sum $\sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^K + \frac{5}{2^K}$

sol) $\underbrace{\sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^K}_{①} + \underbrace{\sum_{K=3}^{\infty} \frac{5}{2^K}}_{②}$

① $\sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^K \Rightarrow$ G-ser $\longrightarrow r = \frac{2}{3}$

$\searrow a = 1$

$|r| = \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ conv to $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

② $\sum_{K=3}^{\infty} \frac{5}{2^K} = \sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{2^K} \cdot 5 = \sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \cdot 5$

$\Rightarrow$ G-ser $\nearrow r = \frac{1}{2}$

$\searrow a = 5$

$|r| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ conv to $\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$

$\Rightarrow \sum_{K=3}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^K + \frac{5}{2^K}\right)$ conv to $3 + 10 = 13$

مراجعة من كالكولس 101 :

* النهاية عندما x تقترب من ∞ أو ∞- :

1. اذا كانت درجة البسط < درجة المقام ⇐ النهاية = صفر

2. اذا كانت درجة البسط > درجة المقام ⇐ النهاية = ∞ أو ∞-

3. اذا كانت درجة البسط = درجة المقام ⇐ النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر اس في البسط}}{\text{معامل أكبر اس في المقام}}$

* لوبيتال :- اذا كان ناتج تعويض النهاية $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$
⇐ نشتق البسط لحال و المقام لحال و نعوض و نجد الجواب
⇐ اذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ نشتقه مرة أخرى و نعوض و هكذا .

1. $(0.\infty)$ ⇐

$$\lim_{x\to a} \overset{0.\infty}{f(x)g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \;\; \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \;\; \frac{\infty}{\infty}$$

2. $(\infty-\infty)$ ⇐ اما توحيد مقامات أو ضرب بالمرافق أو ندخل النهاية إلى داخل f اذا كان $f(g(x))$

3. $(1^\infty, 0^0, \infty^0)$ ⇐ نفرض ما داخل النهاية y و نأخذ ln للطرفين
⇐ $\ln y = g(x)\ln f(x)$ ⇐ ثم نجد النهاية للطرف اليمين و آخر خطوة

$$\lim_{x\to a} e^{\ln y} = e^{constant}$$

P - Series

Form: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^p}$ → Converge if $p>1$
→ diverge if $0<p\leq 1$

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Ex ① $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/3}}$

p-series

$p = 5/3 > 1$

$\rightarrow$ Conv.

② $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[3]{k}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{k^{\frac{1}{3}}}$

p-series

$p = \frac{1}{3}$

$0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ div

③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{k^4} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}}_{①} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}_{②}$

① $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow$ G-ser $<$ $a = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{4} < 1 \longrightarrow$ conv

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \longrightarrow$ p-ser $\longrightarrow p = 4 > 1 \longrightarrow$ conv

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{k^4}$ is conv

Convergence Test اختبارات الحدود الموجبة

* هي عبارة عن 6 اختبارات، كل اختبار يستخدم في حالات خاصة.
* من الممكن للسيريز أن يُحل بأكثر من اختبار، ولكن نلجأ دائماً إلى الاختبار الأسهل.
* جميع هذه الاختبارات الموجبة لا تعطي قيمة للمجموع اذا كانت conv. (يكون السؤال هنا ← حدد اذا كانت السيريز conv أو div فقط)
* تسمى حدود موجبة ← لأن جميع الحدود الناتجة من التعويض في السيريز هي حدود موجبة.

1 The divergence test "D-Test"

* يبحث هذا الاختبار في ما اذا كان السيريز div أو لا عن طريق النهاية (اذا لم يكن السيريز div، فهذا لا يعني أن السيريز conv. بل يكون (اختبار فاشل) ← نبحث عن اختبار آخر يناسب السيريز)

Let $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ be a series

If $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is div.

and if $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \begin{matrix} \text{conv} \\ \text{div} \end{matrix}$ $\Rightarrow$ Test fails

اذا كانت النهاية لـ a_k (ما داخل السيريز) لا تساوي صفر ← فالسيريز div.

* نستطيع من هنا اكتشاف أن :-

If $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ is conv $\Rightarrow \lim_{K\to\infty} a_K = 0$

اذا كانت $\lim_{K\to\infty} a_K = 0$ ليس بالضرورة أن تكون conv ولكن

اذا كانت conv ف $\lim_{K\to\infty} a_K$ تساوي صفر .

Ex Determine whether the series conv or div

① $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^2+2K+1}{4K^2+5}$

$$\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty} \frac{K^2+2K+1}{4K^2+5} = \frac{1}{4} \neq 0$$

درجة البسط = درجة المقام
← معامل أعلى أس في البسط / معامل أعلى أس في المقام

$\Rightarrow$ by "D-Test" $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K^2+2K+1}{4K^2+5}$ is div

(اذا كان السيريز a_K بسط ومقام وكلاهما كثيرات حدود ← يحل بالنظر)
لاحظ أنه يُحل بالنظر ← اذاً أول اختبار نفكر فيه اذا كان السيريز
بسط ومقام هو "D-Test" ← اذا لم تساوي النهاية صفر فهو div
اذا ساوت النهاية صفر نبحث عن اختبار آخر .

② $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K+4}{K^2+5K}$ D-Test $\rightarrow \lim_{K\to\infty} \frac{K+4}{K^2+5K} = 0$

Test fail

نبحث عن غيره .

③ $\sum_{K=1}^{\infty} 1 \longrightarrow$ D-Test $\rightarrow \lim_{K\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \sum_{K=1} 1$ is div

④ $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{K}{\ln(K+1)}$

لوبيتال $\rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

by D-Test $\lim_{K\to\infty} \frac{K}{\ln(K+1)} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{K+1}}$

$= \lim_{K\to\infty} K+1 = \infty \neq 0$

by D-Test $\rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{K}{\ln(K+1)}$ is div

⑤ $\sum_{K=3}^{\infty} \ln\left(\frac{2K+3}{3K+5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^{K-1}$

$= \underbrace{\sum_{K=3}^{\infty} \ln\left(\frac{2K+3}{3K+5}\right)}_{①} - \underbrace{\sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{K-1}}_{②}$

① $\sum_{K=3}^{\infty} \ln\left(\frac{2K+3}{3K+5}\right)$ by D-Test $\lim_{K\to\infty} \ln\left(\frac{2K+3}{3K+5}\right)$

$= \ln\left(\lim_{K\to\infty} \frac{2K+3}{3K+5}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0 \longrightarrow$ div

② $\sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{K-3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \sum_{K=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{K-3} \cdot \frac{4}{25}$

$\rightarrow$ G-ser $r = \frac{2}{5}$, $a = \frac{4}{25}$, $|r| = \left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{K=3} \left(\frac{2}{5}\right)^{K-1}$ is div

$\Rightarrow \boxed{\text{conv} - \text{div} \Rightarrow \text{div}}$

$\Rightarrow \sum_{K=3}^{\infty} \ln\left(\frac{2K+3}{2K+5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^{K-1}$ is div

⑥ $\sum_{k=3}^{\infty} 3k - \ln(4e^{3k}+5)$

by D-Test

$\lim_{k\to\infty} 3k - \ln(4e^{3k}+5)$

$= \lim_{k\to\infty} \ln e^{3k} - \ln(4e^{3k}+5)$

$= \lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{e^{3k}}{4e^{3k}+5}\right)$

$= \ln\left(\lim_{k\to\infty} \frac{e^{3k}}{4e^{3k}+5}\right)$ لوبيتال

$= \ln\left(\lim_{k\to\infty} \frac{3\cancel{e^{3k}}}{12\cancel{e^{3k}}}\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0$

$\Rightarrow$ div

[2] "The Integral Test"

* نلجأ لهذا الاختبار اذا طلب في السؤال أو اذا فشلت جميع الاختبارات الأخرى لحل السؤال. (الحل طويل :( )

Let $\sum_{k=L}^{\infty} a_k$ be a series with positive terms

If $f(x)$ is a function that is:

1) $f(k) = a_k$ for all $k \geq L$
2) f is continuous on $[L, \infty)$
3) f is decreasing on $[L, \infty)$ (i.e, $f' < 0$ on $[L, \infty)$)

Then $\sum_{k=L}^{\infty} a_k$ and $\int_L^{\infty} f(x)\,dx$ both conv. or div.

توضيح طريقة الحل:

١- اذا فشلت كل الاختبارات نلجأ الى integral test

٢- (أ) نأخذ ما داخل السيريز (a_k) ونحوله إلى اقتران $f(x)$ (نضع مكان كل $k \leftarrow x$) ونحدد الفترة (الفترة تبدأ من النقطة التي يبدأ عندها السيريز وينتهي عند ∞)

(ب) نبحث في اتصال $f(x)$ على الفترة $[L, \infty)$ (غالباً نستطيع معرفة ان الاقتران متصل بالنظر مثل كثيرات الحدود و $e^{f(x)}$ و....)

(ج) نشتقه ونساوي المشتقة بالصفر ونعين القيم الناتجة على خط الاعداد ثم نبحث اشارات التزايد والتناقص (* المطلوب أن يكون f متناقص على الفترة $[L, \infty)$)

← اذا تحققت الشروط نستطيع بدء الحل لمعرفة اذا كان conv أو div

٣- نجد $\int_L^{\infty} f(x)\,dx$ (improper integral) ← اذا كان الجواب رقم يكون التكامل conv والسيريز conv / اذا كان الجواب ∞ يكون التكامل div والسيريز div.

* اذا كان السيريز conv فالرقم الناتج هو ليس حاصل المجموع

Ex Determine whether the series conv or div by using integral test:

① $\sum_{K=1}^{\infty} K e^{-K^2}$

D-test → $\lim_{K\to\infty} \frac{K}{e^{K^2}} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2Ke^{K^2}} = 0$ fail

"use I-Test"

1) $f(x) = x e^{-x^2}$, $[1, \infty)$

2) f is continuous on $[1, \infty)$

x , e^{-x^2}

متصلين على $\mathbb{R}$

3) $f'(x) = x(-2x e^{-x^2}) + e^{-x^2}$

$-2x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} = 0$

$\boxed{e^{-x^2}}(-2x^2+1) = 0$

قيمة موجبة ولا تساوي صفر

$e^{-x^2} \Downarrow \neq 0$, $(-2x^2+1) \Downarrow$

$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$- - -$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+ + +$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $- - -$

$1 \longrightarrow$

f dec on $[1, \infty)$

$$* \int_1^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_1^{k} x e^{-x^2}\, dx}_{I}$$

$$I = \int_1^{k} x e^{-x^2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int_1^{k} -2x e^{-x^2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} e^{-x^2} \Big]_1^{k} = \frac{-1}{2} e^{-k^2} + \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-1}{2e^{k^2}} + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e} = \frac{1}{2} e^{-1}$$

توضيح حل التكامل

$\frac{1}{e^{\infty}}$ ← عند التعويض

$\boxed{\text{ويساوي } \frac{1}{\infty} = 0}$

by I-Test $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$ is conv

$\frac{1}{2} e^{-1}$ ليست قيمة المجموع

واضح أن I تكامل بالتعويض حيث أنه مشتقة الأس موجودة في الخارج (أنسى الثوابت) لذلك يمكن الحل بسرعة بدون تعويض، الحل:-

مشتقة e^{-x^2} هي $-2xe^{-x^2}$ ← xe^{-x^2} موجودة، نريد الآن -2

لكي يصبح التكامل عبارة عن تكامل e^{-x^2} ← اضرب التكامل بـ -2 واقسم على -2 (في الخارج) ← سيكون الجواب $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$

هو الذي مشتقته موجودة إذاً هو ناتج التكامل

$$e^{-x^2} \xrightarrow[\text{تكامل}]{\text{نشتق}} -2xe^{-x^2}$$

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

1) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $[1, \infty)$

2) f cont. on $[1, \infty)$

3) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$

المقام لا يساوي صفر

$\boxed{x = 0}$ $+ + + \quad - - -$ (0, 1)

f dec. on $[1, \infty)$

$* \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \lim_{k\to\infty} \left[\tan^{-1}(x)\right]_1^{k} = \lim_{k\to\infty} \tan^{-1}(k) - \tan^{-1}(1)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ليست قيمة المجموع

by I - Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ is Conv

Remember:

① $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ② $\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = \frac{-\pi}{2}$

③ $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ ④ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

⑤ $\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$ ⑥ $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

⑦ $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{nx} = e^{kn}$

مع مراعاة اشارات n,K

③ $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$

1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $[3, \infty)$

2) f is cont. on $[3, \infty)$

$\ln x$ متصل على $(1, \infty)$ ، x متصل على R

3) $f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$

$1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

$e^{\ln x} = e^1$

$\boxed{x = e}$

صفر المقام

critical points $\{0, e\}$

(انفس الفترة لأنو احنا معطينا)

كيف عرفت الإشارات؟

الارقام يلي أقل من واحد واكبر من صفر

$\ln x$ الها سالب مثل $-\ln 2 = \ln 2^{-1} = \ln \frac{1}{2}$

سالب .. ←

$0 \quad + + + \quad e \quad - - - \quad 3$

f dec on $[3, \infty)$

* $\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\int_3^{k} \frac{\ln x}{x}\, dx}_{I}$

مشتقة $\ln x$ هي $\frac{1}{x}$ ← موجودة اذاً فرض

$I = \int_3^{k} \frac{\ln x}{x}\, dx$

let $u = \ln x$

$du = \frac{dx}{x}$

$x = 3 \rightarrow u = \ln 3$

$x = k \rightarrow u = \ln k$

$I = \int_{\ln 3}^{\ln k} u\, du = \left.\frac{u^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln k}$

$I = \frac{(\ln k)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$

عوضنا

$\lim_{k \to \infty} I = \infty \Rightarrow$ by I-Test $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ is div

3 "The Comparison Test"

Suppose that $0 \le a_k \le b_k$

ⓐ if $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ is conv Then $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is conv

اذا الأكبر conv ⇐ اذاً الأصغر منها Conv.

ⓑ if $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ is div Then $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ is div.

اذا الأصغر div ⇐ اذاً الأكبر منها div

* كيف نحصل على b_k من a_k ؟؟ ولها عدة حالات :-

الحالة الأولى: اذا كان البسط لـ a_k ثابت والمقام حاصل جمع أو طرح اقترانين

b_k تكون نفس البسط a_k والمقام نفس الجزء الذي يحمل أكبر قوة في مقام a_k.

ملاحظة مهمة جداً : كلما زاد المقام قلت القيمة
وكلما زاد البسط زادت القيمة

شو يلي بعمله بالزبط ؟؟

نبحث عن b_k بحيث تكون b_k سيريز يسهل معرفة اذا كانت conv أو div ومن ثم أحدد a_k من خلالها

Ex $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{k^4+3k}_{a_k}}$

اشارة الأكبر لـ b_k لماذا؟
لأن مقام a_k أكبر من مقام
b_k وكلما زاد المقام قلت
القيمة (بشرط أن يبقى
البسط نفسه)
$k^4+3k > k^4$

احنا بنحطها

$0 \le \frac{1}{k^4+3k} \le \frac{1}{\underbrace{k^4}_{b_k}}$

تعمل أكبر
أس

a_k أكبر من صفر
دائماً لأنه من الاختبارات
الموجبة.

بما أن الاشارة الأكبر لـ b_k اذاً نبحث في b_k اذا كان conv
(اذا لم يكن conv فالاختبار فاشل وليس div)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ p-series

$p = 4 > 1 \Rightarrow$ conv

by C-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4+3k}$ is conv

(هذا المثال على ⓐ حيث أن الأكبر conv اذاً الأصغر conv)

Ex $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k-2}$

$0 \le \frac{1}{k-2}$ ؟ $\frac{1}{k}$

لمعرفة اشارة الأكبر لأي اتجاه ⇐ $k-2 < k$ (لأنه مطروح منه 2)

وكلما قل المقام زادت القيمة ⇐ $\frac{1}{k-2} > \frac{1}{k}$

$0 \le \frac{1}{\underbrace{k-2}_{b_k}} > \frac{1}{\underbrace{k}_{a_k}}$

ليه غيرنا التسمية؟
لحتى نعتمد انه الأقل هي دائماً
a_k

اشارة الاقل a_k اذا أبحث في a_k اذا كان div
(اذا لم يكن div فالاختبار فاشل)

$\Rightarrow \sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow$ p-ser / Harmonic series
$p=1$ div

$\Rightarrow$ by C-Test $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{k-2}$ div

الحالة الثانية :- البسط و المقام اقترانات ⇐ لا يوجد طريقة محددة لإيجاد b_k ولكن الفكرة أن نغير في a_k لتنتج b_k اقل او اكبر من a_k (التوضيح في الامثلة)

Ex) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{2^{k-1}}$ يمكن حلها على G-ser ولكن سنحاول هنا باستخدام C-Test

$$0 \le \frac{5^{k+1}}{2^{k-1}} \;?\; \frac{5^k}{2^k}$$

$$\Downarrow$$

$$5^{k+1} > 5^k$$

ولكن هنا في المقام يعني $2^{k-1} < 2^k$

$$\frac{1}{2^{k-1}} > \frac{1}{2^k}$$

لذلك :-

$$0 \le \frac{5^{k+1}}{2^{k-1}} > \frac{5^k}{2^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^k \rightarrow \text{G-ser} \begin{cases} r = \frac{5}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$|r| = \frac{5}{2} > 1 \Rightarrow$ div $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{2^{k-1}}$ is div by C-Test

* اذا كان البسط والمقام حاصل جمع أو طرح اقترانين كيف نحصل على b_k ؟

[1] $\dfrac{\text{اقتران + ثابت}}{\text{اقتران + ثابت}}$ أو $\dfrac{\text{اقتران - ثابت}}{\text{اقتران - ثابت}}$ (المقصود البسط والمقام نفس الإشارات)

← تكون b_k نفس a_k مع ازالة الثابت من البسط، ثم نبحث في اشارات الأكبر والأصغر

نحذف من البسط أسهل من الحذف من المقام

[2] $\dfrac{\text{اقتران + ثابت}}{\text{اقتران - ثابت}}$ أو $\dfrac{\text{اقتران - ثابت}}{\text{اقتران + ثابت}}$ (الإشارات مختلفة)

← يكون b_k نفس a_k مع التخلص من الثوابت في البسط والمقام.

Ex) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{7^k+3}{3^k-2}$ by C-Test

اشارات البسط والمقام مختلفة

← [2]

$$\underbrace{\frac{7^k+3}{3^k-2}}_{b_k} > \frac{7^k}{3^k-2} > \underbrace{\frac{7^k}{3^k}}_{a_k}$$

غيرنا التسمية هون لان a_k هي الاقل (كما اتفقنا)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^k \quad \text{G-ser}$$

$r = \left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} > 1$

→ div

→ by C-Test $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{7^k+3}{3^k-2}$ is div