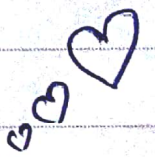


Calculus 102

second

Part - three

By Rahaf
AL-Hami



فزیرہ - التغبیر

فزیرہ - کوریجی

Partial sum of series

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + \dots + ar^n + ar^{n+1} + \dots$$

ممكن ان يغير
البداية ونهاية
تقريباً

هذا هو G-ser (البداية 0 والنهاية ∞)

$$S_n = \sum_{k=0}^n ar^k = a + ar^1 + ar^2 + \dots + ar^n$$

$$= \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

S_n هو partial sum (مجموع جزئي من السلسلة)
وهو جزئ من G-ser (البداية 0 والنهاية n)
(النهاية محددة) و يشار الى $\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

الفرق بين G partial و partial ∞ (النهاية ∞ و partial النهاية رقم محدد)

Ex] $\sum_{k=0}^4 3\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$= 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ r &= \frac{1}{2} \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$= \frac{3\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\approx 5.8$$

(61)

$$\text{Ex} \sum_{k=1}^{20} 3(-2)^k$$

لاحظ أن البداية ليست من صفر $\Leftarrow$ يوجد حد ناقص
لذا نعتبرها partial sum حيث يجب أن تبدأ من 0

(لأننا بدأنا من 0 نضع بدل $k \leftarrow k-1$) عوضاً سيكون الحد الأول 0
ولكن سننتهي عند $n-1$

سنخرج أول حد ليصبح السلسلة :

$$\sum_{k=1}^{20} -2 \cdot 3 (-2)^{k-1} = \sum_{k=1}^{20} -6 (-2)^{k-1}$$

$$= -6 + -6(-2) + -6(-2)^2 + \dots + -6(-2)^{19}$$

$$\begin{aligned} a &= -6 \\ r &= -2 \\ n &= 19 \end{aligned}$$

$$= \frac{-6(1 - (-2)^{20})}{1 - (-2)} = \frac{-6(1 - (2)^{20})}{3}$$

$$= -2(1 - (2)^{20})$$

و بالتالي القاعدة العامة لل partial

$$\sum_{k=b}^n a(r)^{k-b} = a + ar^1 + \dots + ar^{n-b}$$

$$= \frac{a(1 - r^{n-b+1})}{1 - r}$$

(62)

Maclaurin and Taylor series

ملاحظات :-

* $f^{(k)}$ تعني مشتقات وليست أسس
 مثالاً : $f^{(1)} = f'$
 $f^{(2)} = f''$
 $f^{(3)} = f'''$

$$f^{(0)} = f$$

* $0! = 1 \quad // \quad 1! = 1 \quad // \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2 \quad // \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

مستحدث في هذا الدرس عدة أربع تعاريف مهمة :-

Defn 1 If $f(x)$ has derivatives of all orders at $X = C$, then the series :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(C)}{k!} (X-C)^k = f(C) + \underbrace{f^{(1)}(C)}_{f'(C)} (X-C) + \frac{f^{(2)}(C)}{2!} (X-C)^2 + \frac{f^{(3)}(C)}{3!} (X-C)^3 + \dots$$

is called Taylor series for $f(x)$ about $X = C$

في تعريف التaylor سيريز يتبين شكل السيريز وهو عبارة عن صور الثابت "C" في مشتقات الاقتراء مضروبة بالمتغير $(X-C)^k$ حيث C هو الثابت نفسه و k هو العدد المقسومة على مضروب العدد .

* لاحظ أنه البداية من صفر إلى ∞ والثابت $\leftarrow$ لا يباين صفر
 فنسمي Taylor *

Defn 2 The Taylor series for $f(x)$ about $x=0$ is called "Maclaurin series for $f(x)$ "

Maclaurin series :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k$$

* نفس Taylor ولكن $C=0$ (البداية من صفر والنهاية ∞) *

Maclaurin حالة خاصة من Taylor

Defn 3 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(C)}{k!} (x-C)^k$ is called

"n"th Taylor polynomial for $f(x)$ about $x=C$

لاحظ هنا أن البداية من صفر والنهاية n (رقم) ولكن نفس شكل التaylor (يسمى كثير حدود) وهو شكل لا يجار افتراضات كثيرة الحدود

كثير حدود من الدرجة n $P_n(x)$

Defn 4 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x)^k$ is called

"n"th Maclaurin Polynomial for $f(x)$

نفس Maclaurin ولكن النهاية n وليست ∞ فيجب كثير حدود من الدرجة n

(64)

Ex Find the four Taylor polynomial $P_4(x)$,
 $f(x) = \cos x$ about $x = \frac{\pi}{2}$

المطلوب: كثير حدود من الدرجة الرابعة (أكبر قوة لـ x فيه 4)
 طريقة الحل: نحلل هذا الاقتراح حسب القاعدة ثم نجد صور C في
 المشتقات ونعوها في كثير الحدود.

$$n=4 \quad / \quad C = \frac{\pi}{2} \quad / \quad f(x) = \cos x$$

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$$

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

$\cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}$
 $\uparrow$
 $(0,1)$

نستق و نجد صور C في المشتقات :-

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = \cos x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ f^{(1)}(x) &= f'(x) = -\sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \\ f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\cos x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ f^{(3)}(x) &= f'''(x) = \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ f^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x) = \cos x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$P_4(x) = 0 + (-1) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 0$$

$$P_4(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6}$$

الآن السؤال الأهم، كيف نجد السيريز؟؟؟

* يوجد طريقتاه :-

الطريقة الأولى :- باستخدام التعريف، حيث نقوم بإيجاد المشتقات ومن ثم نحاول اكتشاف النمط للسيريز.

الطريقة الثانية :- نعتمد على اقتراح Maclaurin series المعروفة.

* يوجد لعدم الاقتراحات سيريز خاصة بها (يساويها) وممكن أنه يتم التفسير عليه (بالاشتقاق أو التكامل) سنقتدي عليها في إيجاد الكثير من أشكال السيريز.

* سنبدأ بمثال ونحلّه باستخدام التعريف، لتوضيح مفهوم Taylor series.

Ex) Find the taylor series of $f(x) = \frac{1}{x+3}$

about $x=2$.

solution :-

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k \Rightarrow \text{عوضنا 2 بالصورة العامة للتaylor سيريز}$$

* الآن نجد المشتقات (نجد مجموعة منهم)

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x+3} = (x+3)^{-1} \Rightarrow f^{(0)}(2) = \frac{1}{5} \quad (\text{موجب})$$

رفقته للبسط (أسهل للاشتقاق)

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (-1)(x+3)^{-2} \Rightarrow f^{(1)}(2) = -\frac{1}{5^2} \quad (\text{سالب})$$

(66)

$$f^{(2)}(x) = (-1)(-2)(x+3)^{-3} \rightarrow f^{(2)}(2) = \frac{(-1)(-2)}{5^3} \quad (\text{موجب})$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)(x+3)^{-4} \rightarrow f^{(3)}(2) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{5^4} \quad (\text{سالب})$$

لاحظ أنني لم أضرب الأرقام ولم أوجد قيم الأسس في المقام، لماذا؟ لأنني أبحث عن النمط الذي يسري فيه السيريز
الآن هل نستطيع معرفة $f^{(4)}(2)$ دونه أم نستطيع؟

$$\rightarrow f^{(4)}(2) = \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{5^5}$$

لماذا؟ لأنه هذا هو اللفظ الذي أوجدناه
النمط عبارة عن حاصل ضرب سالب مضروب k
والمقام هو 5 مرفوع للأس $k+1$ (حيث k هو العدد)

و بالتالي الشكل العام للمستقيمة -

$$f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^k k!}{5^{k+1}}$$

سؤال آخر، لماذا $(-1)^k$ وليس $(-1)^{k+1}$ ؟ لأنه بداية السيريز
من $k=0$ ولاحظ أنه المشتقة الصفرية $f^{(0)}(2)$ موجبة لذلك عند
التعويض سيكون الحد الأول موجب، أما لو أخذنا
في $(-1)^{k+1}$

$(-1)^{k+1}$ سيكون تعويض $k=0$ $(-1)^1$ وبالتالي سالب وهذا خاطئ
حسب المشتقات التي أوجدناها.

(67)

عوض $f^{(k)}(2)$ الناتج

السلسلة الناتج هو :-

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{5^{k+1} k!} (x-2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^k}{5^{k+1}}$$

ملحظة هامة :-

نعتبر Taylor و Mac. أمثلة على الحدود

السالبة ، لماذا ؟ لأن قيم x متغيرة ومنه المخرج

أنه منتج سوالب لذلك هي ليست دائماً موجبة

← فتعتبر من الافتبارات السالبة

بجد

	Maclaurin series	Interval of Conv.
1	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$-\infty < x < \infty$
2	$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
3	$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$	$-\infty < x < \infty$
4	$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ $= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$	$-1 < x \leq 1$
5	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$-1 < x < 1$
6	$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$	$-1 \leq x \leq 1$

* هذا الجدول يُظهر شكل Mac-series لستة اقترانات مع الفترة التي يكون عندها هذا الاقتران Conv.

* ملاحظة: $k!$ يدل على e^x / $(2k+1)!$ يدل على $\sin x$ / $(2k)!$ يدل على $\cos x$.

سنعلم الآن إيجاد Mac-series لكثير من الدقات

* يجب معرفة أنه في Mac-ser المتغير الوحيد هو X
والباقي يعتبر ثوابت ، يعني مكان كل X نستطيع وضع
أي X المطلوبة (مثلاً $f(x) = 5x^2$ ، $f(x^2)$ ، ماذا يساوي ؟
 $(f(x^2) = 5(x^2)^2 = 5x^4$

* إذا كان في الدقة المطلوب إيجاد Mac-ser له أكثر من X ، نجد Mac لكل جزء ونحقق العمليات المطلوبة
(سيتم التوضيح في الأمثلة)

Ex Find Mac-ser for:

① $f(x) = e^{2x}$

المطلوب Mac e^{2x}

solution:

Mac-ser $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

واعتنا بنظرنا أنه

$\leftarrow e^x \text{ Mac}$

طيب e^{2x} كم يساوي ؟

مكان كل X نضع $2x$ (فقط تعويض)
$$e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$$

② $f(x) = x e^{x^2}$

الدقة بهيكل على أكثر من X

$\leftarrow$ نجد Mac e^{x^2} ثم نضرب بـ X

Mac-ser $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

$$x e^{x^2} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$$

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

فبحث عن اقتران مشابه له
بحث يا صبي Mac-ser له معروفة
(تسمية الاقتران $\frac{1}{1-x}$)

$$\text{Mac-ser. } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

علينا تغيير $\frac{1}{3+x}$ حيث نكتب $\frac{1}{1-(-)}$ لأن هذا هو الجزء الثابت
 أما x فهو متغير δ

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{3}} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3} \right)} \right)$$

ل اخراج عامل مشترك
من المقام

تحويل الجمع إلى ناقص سائب

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-X}{3} \right)^k$$

مكان x وضعنا التغير
الذي نتج معنا أثناء التغير

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^k}$$

وزعت الرسائل

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{3^{k+1}}$$

رحلت السات

وهذا هو الشكل العام للسير في القى اعتباراً

$$\frac{1}{3+x}$$

(71)

④ $f(x) = \ln(2+x)$

Mac-ser $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$

$$\ln(2+x) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

↓

$$= \ln 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{k+1}}{k+1}$$

⑤ $f(x) = \frac{2x}{1-x^3}$

Mac-ser $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

$$\frac{1}{1-x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k}$$

$$\frac{2x}{1-x^3} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{3k+1}$$

(72)

$X=c = \text{Mac.}$
 $X=c = \text{Taylor}$
 آخر
 غير الضر

* Taylor ser. for $f(x)$ about $X=c$

Taylor و ليس Maclaurin سر مختلف الحل بشكل بسيط
 حيث سنستخدم طريقة Mac. ولكن بدل X سنضع متغير
 آخر ثم نعيد المتغير إلى أصله (يعني نستخدم الفرص)

Ex) Find the Taylor ser. for $f(x) = \frac{1}{x+3}$
 about $X=2$.

مخطط
 الحل
 حسب
 طريقة
 التفاضل
 المتكرر

Let $t = X - c \Rightarrow f(x) \rightarrow f(t) \Rightarrow \text{Mac-ser} \Rightarrow t \rightarrow X$
 نغير t نغير t نغير t نغير t
 لا أصلها (تبدل X)
 نحول $f(x)$ ونجعله $f(t)$
 نقرضنا بدلالة t

الحل

$$t = X - 2$$

$$X = t + 2$$

الفرص

$$f(t) = \frac{1}{(t+2)+3} = \frac{1}{t+5} \quad \text{عوضنا قيمة } X = t+2$$

$$\frac{1}{t+5} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{5}} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{t}{5}\right)} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{5} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{5^{k+1}}$$

$$\frac{1}{t+5} \text{ Mac}$$

(73)

Taylor ser for $f(x) = \frac{1}{x+3}$ about $x=2 \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-2)^k}{5^{k+1}}$$

بدل $t \leftarrow x-2$
ضعه في

* انتبه أ ~ الاشكال التي طلب حفظها للصراحت

* (10) Mac-ser و ليست Taylor

Ex Find the taylor ser. for $f(x) = \ln x$ about $x=e$.

sol: let $t = x - e$
 $x = e + t$

$f(t) = \ln(e+t)$ (Find Mac-ser for $f(t)$)

$$\begin{aligned} \ln(e+t) &= \ln\left(e\left(1+\frac{t}{e}\right)\right) = \ln e + \ln\left(1+\frac{t}{e}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{e}\right)^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

Taylor ser for $f(x) = \ln x$ about $x=e \Rightarrow$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x-e}{e}\right)^{k+1}}{k+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{e} - 1\right)^{k+1}}{k+1}$$

(74)

Ex Find the Taylor series for $f(x) = e^x$ about $x=2$.

$$\text{let } t = x - 2$$

$$x = 2 + t$$

$$f(t) = e^{2+t}$$

$$e^{2+t} = e^2 \cdot e^t = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

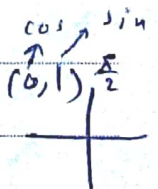
$$\text{Taylor ser.} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k!}$$

Ex Find the Taylor series of $f(x) = \sin x$ about

$$x = -\frac{\pi}{2} ? \quad \text{let } t = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x = t - \frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t \cos \frac{\pi}{2} - \cos t \sin \frac{\pi}{2}$$



$$f(t) = -\cos t = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$$

Taylor ser. for $f(x) = \sin x$ about $x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}$$

Power Series

The series has the form

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$$

is called a power series in " $x-c$ "

Power series : هي متسلسلة على صورة $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$ حيث أن b_k له علاقة له بـ x (لا يحتوي على x)

والأمثلة عليها : Taylor and Maclaurin series

Ex Taylor $\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$

b_k (له علاقة له بـ x)

Ex Taylor $\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$

$$b_k = \frac{1}{k!}$$

at $x=c$
 Conv $\rightarrow$ on $[a, b]$
 on $(-\infty, \infty)$
 div

Taylor $\rightarrow$ يكون conv أو div وإذا كان conv يكون
 conv إما عند $x=c$ (نقطة) أو على الفترة المفتوحة أو الغلقة
 (a, b) أو على $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \begin{cases} \text{Conv} \rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ \text{div} \rightarrow |x| \geq 1 \end{cases}$$

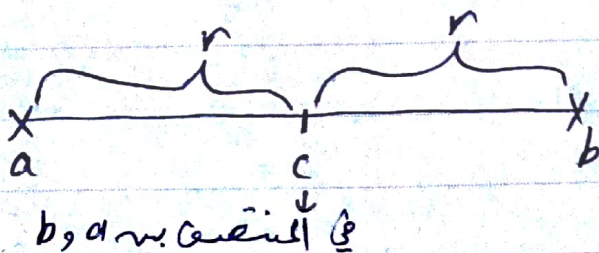
لهذه هي فترة ال Conv (إذا عوضنا قيم x بأي شيء -1 و 1 يكون الجواب Conv)

سنحدث الآن عن فترات ال Convergence ونصف قطر هذه الفترات
هذا الدرس مهم جداً -

Radius and Interval of Convergence

Let $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$ Power series in "x-c" Then

Interval of Conv.	Radius of Conv.
[1] Conv. at $x=c$ (only) القيمة الوحيدة التي يكون عندها التقارب C هي Conv.	$r=0$ نصف القطر للفترة صفر (أكد لأنه $0 = \frac{c-c}{2}$)
[2] <u>Conv-abs</u> on $(-\infty, \infty)$	$r = \infty$
[3] <u>Conv-abs</u> on $[a, b]$ or (a, b) or $[a, b)$ or $(a, b]$	$r = \left \frac{b-a}{2} \right$ مطلوبه لأي شيء بدلي طول



الدفتبار الذي نستخدمه لـ إيجاد Radius (نصف القطر) وفترة (Convergence) هو $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ratio Test for abs. Conv.} \\ \text{Root Test for abs. Conv.} \end{array} \right.$

لماذا؟ لأن Taylor و Mac. عبارة عن اختبارات سالبة.

سيتم توضع الحالات الموجودة في الجدول من خلال الأمثلة :-

Ex] Determine the interval of Convergence and radius of convergence.

II] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!} (x-1)^k$ by R-Test-II

١- سنستخدم Ratio لأن b_k يحتوي على مضروب

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|10^{k+1} (x-1)^{k+1}|}{|(k+1)!|} \cdot \frac{|k!|}{|10^k (x-1)^k|}$$

٢- الجذر الذي يحتوي على x هو الذي يأخذ الظاهر في هذا المثال (الباقي قيمته موجبة دائماً حيث أن المضروب هو فقط الأعداد الموجبة وأيضاً 10^k) لا تنتج له أعداداً موجبة

٣- حد النهاية / ملاحظة هامة جداً: $|x-1|$ هو عبارة عن رقم (ثابت)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10^{k+1} |x-1|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{10^k |x-1|^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10^k \cdot 10 \cdot |x-1|^k |x-1|}{(k+1) k!} \cdot \frac{k!}{10^k |x-1|^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10 |x-1|}{k+1}$$

$|x-1|$ رقم

هنا درجة البسط = 0 أقل من درجة المقام = 1
وبالتالي :-

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10 |x-1|}{k+1} = 0 < 1 \quad \text{for all } x \in (-\infty, \infty)$$

٤- جواب النهاية ثابت (في هذا المثال دائماً يساوي صفر)
لذلك هو Conv. على كل R (يعني أي رقم نبغضه مكانه
 $x \in \text{السيريز رح تكون Conv}$)

→ Interval of Conv: $(-\infty, \infty)$

→ Radius: $r = \infty$

لأنه الجدول

* إذا الحالة الأولى: متى يكون (Conv. on $(-\infty, \infty)$) ؟
عندما يكون جواب النهاية رقم (ثابت)

2) $\sum_{k=0}^{\infty} k! (x-4)^k$ by R-Test-II

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)! |x-4|^{k+1}}{k! |x-4|^k}$$

المطلقة فقط
للجذر الذي
يحتوي على x

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1) \cancel{k!} \cdot |x-4|^{\cancel{k}} |x-4|}{\cancel{k!} |x-4|^{\cancel{k}}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) |x-4| = \begin{cases} \infty, & \text{if } x \neq 4 \\ 0, & \text{if } x = 4 \end{cases}$$

لدينا أنه لو عوضنا في x أي رقم ما عدا (4) مثلاً عوضنا 5

$$\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) |5-4| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

سيكون الجواب ∞ ، وإذا كان ∞ سيكون div حسب

شروط Ratio-Test-II ولكن إذا عوضنا 4 سيكون النهاية

$$\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0 < 1 \Rightarrow \text{Conv} \quad (\text{حسب قواعد Ratio-Test-II})$$

وبالتالي هي Conv فقط عند $x=4$

$\Rightarrow$ Interval of Convergence " $x=4$ "

$\Rightarrow$ Radius: $r=0$

* الحالة الثانية: متى يكون (Conv. on $x=c$) ؟

عندما يكون لجواب النهاية عاقلية ∞ أو ما لها

لأنه يخرج Conv

3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X+2)^k}{k (-3)^k}$

by R-Test - II
 لماذا Ratio وليس Root؟ لأنه الذي ليس
 للسيريز كامل.

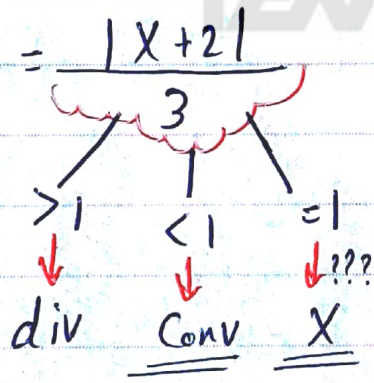
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X+2|^{k+1}}{(k+1) 3^{k+1}} \cdot \frac{k \cdot 3^k}{|X+2|^k}$$

لما نأخذ المطلق بروج السالب
 $(-3)^k = (-1)^k 3^k$
 $|-3|^k = 3^k$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X+2|^k |X+2|}{(k+1) 3^k \cdot 3} \cdot \frac{k \cdot 3^k}{|X+2|^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X+2| k}{3k+3}$$

درجات البسط والمقام متساوية لذلك
 جواب النهاية = معامل أكبر أس في البسط
 معامل أكبر أس في المقام



الآن حسب شروط Ratio
 أكبر واحد
 أقل واحد
 يساوي واحد

فبحث أيها السيريز Conv؟
 (a) عندما يكون $\frac{|X+2|}{3} < 1$

(b) عندما $\frac{|X+2|}{3} = 1$ (لأنه الافتبار)
 فأنه عندما $X = 1$ لذلك سنبحث
 عن افتبار آخر غير Ratio

$$(a) \frac{|x+2|}{3} < 1$$

ضرب تباري

$$|x+2| < 3$$

$$-3 < x+2 < 3$$

$$-5 < x < 1$$

$$(-5, 1)$$

اطرح 2

$$|x| < b$$

$$-b < x < b$$

هذه هي فترة الـ Convergence ولكن هذه الفترة مفتوحة أم مغلقة
من الأطراف م علينا فحص ذلك.

$$\text{at } x = -5 \Rightarrow$$

عوضنا -5 في السلسلة الأصلي (ممكن أن يكون اختيار موجب وممكن أن يكون سالب، ولكن لو استخدمنا Ratio لأنه الجواب سيكون واحد وسيفشل الاختبار)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k(-3)^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{div} \quad \text{ربا لتالي} \quad (-5, 1)$$

لـ نتج اختبار موجب (عادي)
ممكن يكون سالب !!

مفتوح (غير داخل)
في فترة الـ Convergence

$$\text{at } x = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k(-3)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k(-1)^k 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^k k}$$

نتج اختبار راسال "A L-ser" (أيضاً لاستخدام Ratio لأنه سيفشل)
by A L-ser-Test

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

(2) ? dec

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots \Rightarrow \text{dec}$$

$\Rightarrow$ Conv

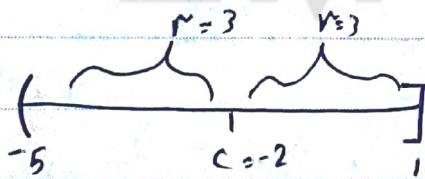
(الواحد ضمن فترة ال Conv)

وبالتالي مغلقة

الحالة رقم (6) لا داعي لها لأنه (بالصدفة) كماه الرقم واحد أحد أطراف الفترة، ولكن لم يكن من الأطراف فيجب فحصه.

$\Rightarrow$ Interval of Conv $(-5, 1]$

$$\Rightarrow \text{Radius } r = \frac{1 - (-5)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$



ملحوظة: إذا طلب في السؤال فقط Radius (نصف القطر) نستطيع إيجاد دونه معرفة إذا كانت حدود الفترة مفتوحة أو مغلقة يعني من خطوة $(-5, 1]$ نستطيع حسابه

$$r = \frac{1 - (-5)}{2} = 3$$

* الحالة الثالثة: متى يكون $(\text{Conv. to } [a, b])$ ؟
إذا كان جواب النهاية يحتوي على $|x - c|$

Ex Find interval and radius of convergence.

① $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^k}{3^{2k}}$ R-Test-II

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|2x-1|^{k+1}}{3^{2k+2}} \cdot \frac{3^{2k}}{|2x-1|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|2x-1|^{k+1} |2x-1|}{3^{2k} \cdot 3^2 |2x-1|^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|2x-1|}{9} = \frac{|2x-1|}{9} \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{div} \\ < 1 \rightarrow \text{conv} \\ = 1 \rightarrow ?? \end{cases}$$

الحالة الثالثة

$$\frac{|2x-1|}{9} < 1$$

$$|2x-1| < 9 \Rightarrow -9 < 2x-1 < 9$$

$$-8 < 2x < 10$$

$$-4 < x < 5$$

$$(-4, 5)$$

$$\text{Radius} = \frac{5 - (-4)}{2} = \frac{9}{2}$$

ابحث الـ convergence على الحواف

at $x = -4$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-9)^k}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ AL-ser.}$$

by AL ser-Test

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{div}$$

مفوض عند $x = -4$

(لا تستخدم Ratio لأنه سيفشل)

$$\begin{aligned} (-9)^k &= (-1)^k (9)^k \\ &= (-1)^k (3^2)^k \\ &= (-1)^k 3^{2k} \end{aligned}$$

توضيح

at $X=5$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9^k}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k}}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \rightarrow D\text{-Test}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{div.} \rightarrow X=5 \text{ غير داخلة بالفترة}$$

Interval of Conv. $(-4, 5)$

$$\text{Radius} = \frac{5 - (-4)}{2} = \frac{9}{2}$$

$$(2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (X-4)^k}{(k+1)^2} \text{ by R-Test - 11}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C_{k+1}|}{|C_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X-4|^{k+1}}{(k+2)^2} \cdot \frac{(k+1)^2}{|X-4|^k}$$

$(-1)^k$ يتروح
بسبب المطلقة

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X-4|^k |X-4|}{(k+2)^2} \cdot \frac{(k+1)^2}{|X-4|^k} = |X-4|$$

إذا $|X-4| < 1$ Conver
إذا $|X-4| > 1$ Div
إذا $|X-4| = 1$??
(لأنه ليس متناهي في البسط والمقام)

$$\begin{aligned} |X-4| &< 1 \\ -1 &< X-4 < 1 \\ 3 &< X < 5 \\ &? (3, 5)? \end{aligned}$$

الأسس تجمع $\rightarrow$

$$\text{at } X=3 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(k+1)^2}$$

$(-1)^{2k} = 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \text{ by C-Test}$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2}$$

توضيح

$$\begin{aligned} k+1 &> k \\ (k+1)^2 &> k^2 \\ \frac{1}{(k+1)^2} &< \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad p\text{-ser} \rightarrow p=2>1 \Rightarrow \text{Conv} \Rightarrow X=3$$

داخل الفترة

$$\text{at } X=5 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \quad \text{by AL-ser-Test}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 0$$

$$? \text{dec} \Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \dots \Rightarrow \text{dec}$$

$$\Rightarrow \text{Conv} \Rightarrow X=5 \text{ داخل الفترة}$$

Interval of conv. $[3, 5]$

$$\text{Radius} = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$(3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(\ln k)^k} \quad \text{by Root-Test-II} \Rightarrow \text{لأن الأس يقف عند الكمال السريز}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{X}{\ln k} \right)^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|C_k|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{X}{\ln k} \right)^k \right|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X|}{\ln k}$$

الأس $\frac{1}{k} \cdot k$ يروحوا والمطلوب يذهب لـ X (لأن $\ln k \sim k$ كلما كبرت k)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|X|}{\ln k} = \frac{|X|}{\infty} = 0 < 1 \quad \text{for all } X \in (-\infty, \infty)$$

$$* \text{Interval of conv. : } (-\infty, \infty), \quad r = \infty$$

$|X|$ بـ ∞ كافي
سيكون صفر

smile for life

Differentiating and Integrating "Power-ser"

٨٨ Power series (دور لدریس)

* Let $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k$, (a, b) [?] [?] Then:
 ~ افتراض ~ فترة convergence

① $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (b_k (x-c)^k)$, (a, b) , r

نريد اشتقاق f بالنسبة لـ x (يعني b_k ما له دخل)

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k k (x-c)^{k-1}$$

الفترة a إلى b ثابتة
 ولكن المفتوح والمغلقة
 يمكن أن يتغير، و r ثابتة

② $\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int b_k (x-c)^k dx$, (a, b) , r

نكامل بالنسبة لـ x أيضاً

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(x-c)^{k+1}}{k+1} + D$$

هنا سنستخدم MacLaurian واشتقاقه وتكامله (②, ①) لإيجاد المجموع

* Find the sum

1- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

الآن سنأخذ العكس، عن السيريز ولكن
 قيمته كم تتقارب؟ فتساوي e^x

$$\text{Ex)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} = e^5 \rightarrow (x=5)$$

يعني أنه السلسلة العطاء سيكون متقاربة فيها قيمة x وسنوجد قيمة المجموع من خلال Mac-ser. معروفة (بالإضافة للاشتقاق والتكامل)

$$2 - \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{Ex)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ملحظة: k تدل على e^x / $(2k+1)!$ تدل على $\sin x$ / $(2k)!$ تدل على $\cos x$

الآن في الأمثلة، سنبحث عن Mac-ser مشابه للسلسلة المعطى.

Ex) Find the sum ?

قيمة المجموع هي نفسها "Conv to L"

$$\text{II)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

تقارن مع
لأن السلسلة
حتوي على $(2k+1)!$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

هذا الجزء جاهز ما غير فيه

نبحث عن x^{2k+1}
لأن P لكي أعوض
قيمة x في $\sin x$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

استطعت اخراج $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ خارج
السيريز لانه ثابت و ما الى
علاقة ب k (اذ ان كل مرفوع
لقوة k له استطيع اخراجه
(او مضروب ب k او ...)

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

طريقة أخرى :- $\sin x$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

اضرب ب x^2 الطرفية (كي تصبح x^{2k+3})

$$x^2 \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(2k+1)!}$$

الصورة العامة للسيريز المطلوب

$$\xrightarrow{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+3}}{(2k+1)!} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{9^k (2k)!} & \quad \text{تقارب مع} \quad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{\pi^{2k} \cdot \pi}{9^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{\pi^{2k} \cdot \pi}{3^{2k}} \\
 &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

كل الأوراق التي تحمل قوة تحتوي على (k) مؤلفها للرقم قوة $(2k)$ لماذا؟ لأن في $\cos X$ مرفوعة لـ $2k$ (أو أياً أصلاً) بحيث X (∴)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{9^k (2k+1)!} & \quad \sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{\pi^{2k+1} \cdot \pi^{-1}}{3^{2k+1} \cdot 3^{-1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1} \cdot \frac{3}{\pi} \\
 &= \frac{3}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1} = \frac{3}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{3}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}
 \end{aligned}$$

صربنا بـ $\frac{\pi^{-1}}{3^{-1}}$ لأنه جذا
لـ $2k$ واحد

$\frac{\pi^{-1}}{3^{-1}} = \frac{1/\pi}{1/3} = \frac{3}{\pi}$

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln(1+1) = \ln 2$$

$$1^k = 1$$

قارنتها مع

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$$

$$(5) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (2)^{k-1}}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

لاحظ أنه يوجد في هذا السيريز k^2 غير موجودة في e^x ، ولا أستطيع اخراجهما من السيريز لأنها تعتمد على k ، ما الحل ؟

الآن سنلجأ للاشتقاق أو التكامل ، نشق ما ذا ؟
نشق ال Mac المعروف يعني في هذا المثال نشق e^x
لماذا نشقه ولا تكامل ؟ لأنه اذا كاملنا سيكون جرد k في المقام
والمثال الجرد الزائد في البسط لذلك نشقه

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

اشتق الطرفين

$$\frac{d}{dx} \downarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!}$$

$k=0$ هو أول حد في عوضه في السيريز
جوابه صفر اذاً بقدر اغير
الحد الأول بدل الصفر واحطه
واحد (لأن الصفر يعطيني صفر)

هل حصلت على k^2 ؟ لا ، حصلنا على k فقط
اذاً نشق مرة ثانية
ولكن قبل ما نشق

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k \cdot x^{-1}}{k!}$$

$$x e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^k}{k!}$$

$\frac{d}{dx} \downarrow$

$$x e^x + e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^{k-1}}{k!}$$

من باب ضرب تباري
(لاني ابعثه قوة
لـ x بتباري k-1
واذا اشتقيت مرتبه
تـ 2 يغير x-2)

وصلنا إلى الصورة العامة في الآتي عوضاً بـ x=2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 2^{k-1}}{k!} = 2e^2 + e^2 = 3e^2$$

Conv to $3e^2$

$$\sum_{k=b}^{\infty} \frac{1}{k 4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1) 4^{k+1}}$$

* بدأنا من الصفر نضع مكانه كل k $k+b$

* وإذا كان السير يبدأ من صفر و أنا غيرت لرقم ثاني

يجب للسير قيمة الحدود حتى أوصل الرقم المطلوب

يعني صورهم

(كما في المثال
السابع)

$$⑥ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1) 4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^{k+1}}{(k+1) 4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{k+1}$$

نقارنه مع

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

لماذا؟ لأنني استطعت الحصول على القوة $k+1$
والقام $k+1$ من كامل $\frac{1}{1-x}$

ملحظة هامة:

عندما نكامل يجب
ايجاد قيمة ثابت التكامل
من خلال تعويض أي رقم

$$-\ln|1-x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

أوجد قيمة C

$$\text{let } x=0$$

$$-\ln 1 = 0 + C$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C=0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ في الصورة العامة } \Rightarrow -\ln|1-x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{k+1} = -\ln\left|1-\frac{1}{4}\right| = -\ln\left|\frac{3}{4}\right|$$

$$= \ln\left|\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right| = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$⑦ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e-1)^k}{k e^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-(1-e))^k}{k e^k}$$

أخرجت السالب عامل مشترك، لماذا؟
لأنني أبحث عن $(-1)^k$ في السلسلة

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e)^k}{k e^k}$$

لأن كل Mac المناسبة لهذا السلسلة
تحتوي على $(-1)^k$.

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1-e}{e} \right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)^k$$

تقاربه مع $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$

الفرق بين $(-1)^{k+1}$ و $(-1)^k$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot -1 \cdot x^k}{k}$$

$$\ln(1+x) = (-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

$$-\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

← الصورة العامة ← عوض $x = \frac{1}{e} - 1$

$$\Rightarrow -\ln\left(1 + \frac{1}{e} - 1\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^{-1} = \ln e = 1$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{8} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \xrightarrow{\text{عوضه}} \tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1)^{2k+1}}{2k+1} \\
 &= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{9} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+5}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1} \left(\frac{\pi}{3}\right)^4}{(2k+1)!} \\
 &= \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{3}\right)^4 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Parametric equation

Defn The parametric equation of $y = f(x)$ is:

$$\begin{aligned} X &= X(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

cartesian equation is
 $y = f(x)$

Parametric eq. : هو معادلات مُجزأة من $f(x)$ وهذه المعادلات بدلالة المتغير t

Ex Find the cartesian function For:

① let $\begin{aligned} X &= 3t - 4 \\ y &= 6t + 2 \end{aligned}$

بما أن X ليست مرتبطة مع y مباشرة (إذاً y per-eq.)

$$X = 3t - 4$$

$$\Rightarrow 3t = X + 4$$

$$t = \frac{X + 4}{3}$$

عوذنا قيمة t في y

$$y = 6 \left(\frac{X + 4}{3} \right) + 2$$

$$y = 2X + 10 \Rightarrow \text{معادلة خطية}$$

وهي عبارة عن خط مستقيم

② par. eq. $\begin{cases} X = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

إذا اجتمع $\sin$ و $\cos$ كل منهما لتغير ربع الفترة
 ستحصل إما على دائرة (circle) أو قطع مكافئ (parabola)
 أو قطع ناقص (Ellipse) أو قطع زائد (Hyperbola)

$$\begin{aligned} X^2 &= 4 \cos^2 t \\ y^2 &= 4 \sin^2 t \end{aligned} \quad \text{+}$$

$$X^2 + y^2 = 4 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$X^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{circle}$$

بدأ وانتهى من نفس النقطة $t=0 \leftarrow t=2\pi$
 وبالتالي هي معادلة دائرة كاملة.

③ $\begin{cases} X = 3 \sec t \\ y = 4 \tan t \end{cases}$

$\sec$ و $\tan$ نفس $\sin$ و $\cos$

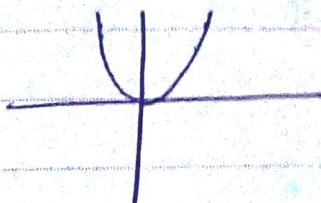
$$X^2 = 9 \sec^2 t \rightarrow X^2/9 = \sec^2 t$$

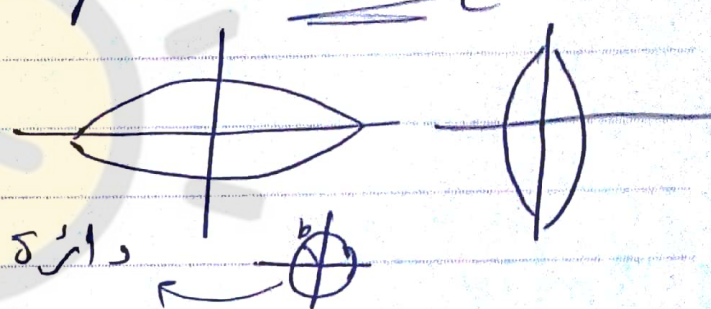
$$y^2 = 16 \tan^2 t \rightarrow y^2/16 = \tan^2 t$$

$$\frac{X^2}{9} - \frac{y^2}{16} = \sec^2 t - \tan^2 t$$

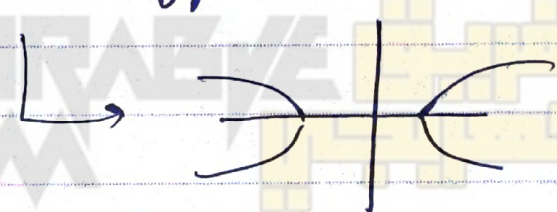
$$\frac{X^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \text{Hyperbola}$$

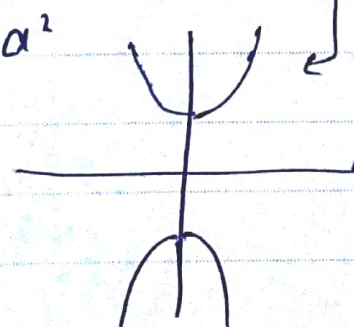
(*) معادلات الأشكال المهمة :-

① $y = x^2$: parabola قطع مكافئ 

② $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: Ellipse قطع ناقص 

→ $x^2 + y^2 = b^2$: circle دائرة

③ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: Hyperbola قطع زائد 

④ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 

الرسومات غير مطلوبة

[X] Let $X = X(t)$ be par-eq. Then:
 $y = y(t)$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=t_0}$$

معادلة
 par-eq

Ex Let $X(t) = \sqrt{t}$ find $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1}$
 $y(t) = 2t + 7$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=1} = \left. \frac{2}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \right|_{t=1}$$

$$= 4\sqrt{t} \Big|_{t=1} = 4$$

انتهى y في البسط و X في المقام

No. (99)

What is

Tangent line

1 The slope of the tangent to $x = x(t)$
 $y = y(t)$
at $t = t_0$ is

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=t_0}$$

ميل الخط للمعادلة
هي ناتج تقوية t_0
في المشتقة

2 Equation of tangent line معادلة خط الخط
هي معادلة الخط المستقيم

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

1- $m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0}$

2- $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$

المطلوب هو إيجاد المعادلة
Ex] Find the equation of the tangent line to the curve $X(t) = 2t + 4$ at $t = 2$
 $y(t) = 8t^2 - 2t + 4$ at $t = 2$, t_0

sol

$$y - y_0 = m(X - X_0)$$

$$1 - m = \text{slope} = \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=2} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \bigg|_{t=2} = \frac{16t - 2}{2} \bigg|_{t=2}$$

$$= \frac{30}{2} = 15$$

$X(t)$ عند $t=2$ عموماً $y(t)$ عند $t=2$ عموماً

$$2 - (X_0, y_0) = (X(2), y(2))$$

$$= (8, 32)$$

$$\Rightarrow \text{eq: } y - 32 = 15(X - 8)$$

$$y - 32 = 15X - 120$$

$$y = 15X - 88$$

Ex] Find the slope for $X(t) = t - t^4$ at $(0, 0)$?
 $y(t) = t^2 - t^3$

sol

$$X = 0, y = 0$$

← t_0 ←

$$X=0 \Rightarrow t - t^4 = 0$$

$$t(1 - t^3) = 0$$

$$t = 0, t = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y=0 \Rightarrow t^2 - t^3 = 0 \\ t^2(1 - t) = 0 \\ t = 0, t = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{slope} = \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=0} = 0 \quad / \quad \text{slope} = \frac{dy}{dx} \bigg|_{t=1} = \frac{2t - 3t^2}{1 - 4t^3} \bigg|_{t=1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

smile

Horizontal and Vertical tangent line

* Let $X = X(t)$ be a par-eq.
 $y = y(t)$

[1] If $y'(t_0) = 0$ and $x'(t_0) \neq 0$ Then there
is a Horizontal tangent line at $t = t_0$.
(at $(X(t_0), y(t_0))$)

* اذا كانت مشتقة البسطة عند t_0 تساوي صفر ومشتقة المقام عند t_0 لا تساوي صفر $\Leftarrow$ يوجد hor. tan. عند t_0

[2] If $y'(t_0) \neq 0$ and $x'(t_0) = 0$ Then there
is a Vertical tangent line at $t = t_0$.
(at $(X(t_0), y(t_0))$)

* اذا كانت مشتقة البسطة عند t_0 لا تساوي صفر ومشتقة المقام عند t_0 تساوي صفر $\Leftarrow$ يوجد Ver. tan. عند t_0

* تسمى النقاط التي تجعل مشتقة البسطة ومشتقة المقام تساوي صفر $\Leftarrow$
(singular point)

Ex Let $X(t) = 2t^3 + 15t^2 + 24t + 7$
 $y(t) = t^2 + 4t + 1$

Find all values of "t" at which the par.
 curve has : 1- horizontal tangent line
 2- Vertical tangent line

Sol المطلوب قيمة t ← يعني رقم / لو طلبت point ← نجر القيمة وصورنا .

الحل : استمروا $y'(t)$ ثم $x'(t)$ (لكي يكون الترتيب البسيط أولاً)
 ، ماويها بالصفر ووجدت قيمة t

البسيط : $y'(t) = 2t + 4 = 0$

في المشتقة $\frac{dy}{dt}$

$$2t = -4$$

$$\boxed{t = -2}$$

بالاستمارة على 6 : $x'(t) = 6t^2 + 30t + 24 = 0$ المقام في المشتقة $\frac{dx}{dt}$

$$t^2 + 5t + 4 = 0$$

$$(t + 4)(t + 1) = 0$$

$$\boxed{t = -4} \text{ and } \boxed{t = -1}$$

1 - Parametric eq. has Hor. tangent line at $t = -2$
 since $y'(-2) = 0$ and $x'(-2) \neq 0$

إذاً Hor عند $-2 \leftarrow$ لأن صورنا -2 في البسيط $(y'(t))$ نحاول
 صفر ولا نحاول صفر في المقام $(x'(t))$

2 - Parametric eq. has Ver. tangent line at :

(a) $t = -1$ since $x'(-1) = 0$ and $y'(-1) \neq 0$

(b) $t = -4$ since $x'(-4) = 0$ and $y'(-4) \neq 0$

Ex Find $t \in [0, \pi]$ such that the curve
 parametrize by $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \sin 4t$ has
 1- hor. tangent line
 2- Ver. tangent line

sol

$$y'(t) = 4 \cos 4t$$

$$x'(t) = -2 \sin 2t$$

$$y'(t) = 0 \Rightarrow 4 \cos 4t = 0$$

$$\cos 4t = 0$$

$$4t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$$

$$t = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \dots$$

but $t \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}} \in [0, \pi]$$

$$x'(t) = 0 \Rightarrow -2 \sin 2t = 0$$

$$\sin 2t = 0$$

$$2t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$$

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

but $t \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \boxed{t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi} \in [0, \pi]$$

موجود ہے $y'(t) = 0$
 وغیرہ موجود ہے
 $x'(t) = 0$

1- hor. tangent line at $t = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$

2- Ver. tangent line at $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

$0 = y'(t)$ موجود ہے
 $0 = x'(t)$ وغیرہ موجود ہے

Arc length of parametric curve

For the curve $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$
 $y = y(t)$

The arc length of this curve is given by:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

طول القوس للعادة $par.$ t يساوي التكامل المحدود L
 الفترة معطاة في السؤال (تكامل بالنسبة لـ t)

Ex) Find the arc length of the curve
 $x = \sin t + \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$
 $y = \sin t - \cos t$

sol.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos t - \sin t & \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t \\ & & &= 1 - 2 \sin t \cos t \\ & & &= 1 - \sin 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \cos t + \sin t & \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \sin^2 t \\ & & &= 1 + \sin 2t \end{aligned}$$

اوجدنا ما داخل الكامل ، اننا عوض فيه

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2t + 1 + \sin 2t} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2} \, dt = \pi \sqrt{2}$$

Ex] Find the Arc length of the curve:

$$x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = (-e^t \sin t) + (e^t \cos t)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = e^{2t} \sin^2 t - 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \cos^2 t$$

$$= e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t) - e^{2t} \sin 2t$$

$$= e^{2t} - e^{2t} \sin 2t \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t + e^t \sin t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \sin^2 t$$

$$= e^{2t} + e^{2t} \sin 2t \quad \text{--- (2)}$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t} - e^{2t} \sin 2t + e^{2t} + e^{2t} \sin 2t} \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^t \, dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}$$

المطابقات الهامة :

$$\sin^2 X + \cos^2 X = 1$$

$$\sin 2X = 2 \sin X \cos X$$

$$\begin{aligned}\cos 2X &= \cos^2 X - \sin^2 X \\ &= 1 - 2 \sin^2 X \\ &= 2 \cos^2 X - 1\end{aligned}$$

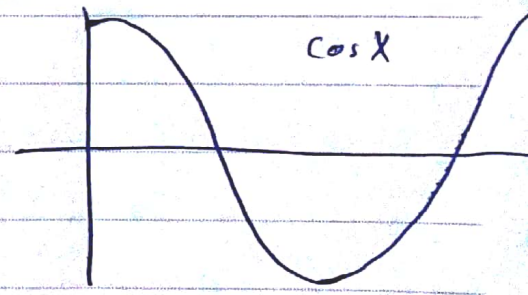
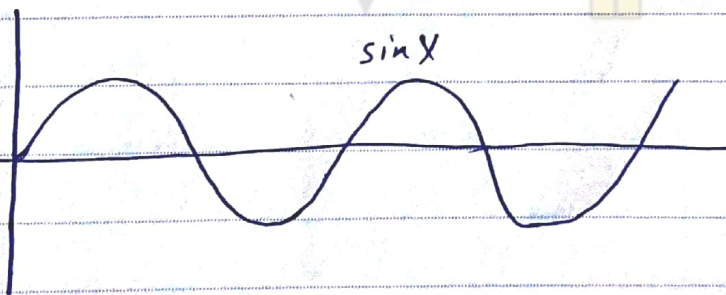
$$\tan^2 X = \sec^2 X - 1$$

$$\cot^2 X = \csc^2 X - 1$$

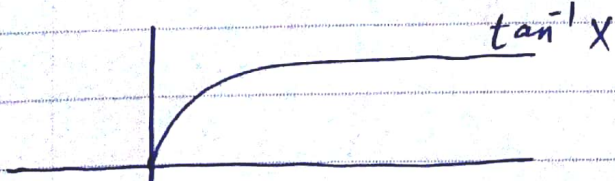
انتهت مادة الكنتز ... الحمد لله ♥

سؤال بسيط للتوضيح ، لماذا اعتبرنا $\sin X$ و $\cos X$ من اختبارات الحدود الموجبة ؟
الحدود السالبة و $\tan^{-1} X$ من اختبارات الحدود الموجبة ؟

نبدأ من صفر
لأنه السيري
يبدأ بأشارة
من صفر



لاحظ أن $\sin X$ و $\cos X$ قيمهم مرة موجبة ومرة سالبة لذلك يعتبروا من
اختبارات الحدود السالبة



أما $\tan^{-1} X$ كذا قيمها بعد الصفر موجبة
← إذاً تعتبر من اختبار الحدود الموجبة .

المحدثه ♥
by Rakaf A L-Hami (The End)